ІОГ. ФРИДЕРИКА ВЕЙДЛЕРА АНАЛИТИКА СПЕЦІОЗА,

ИЛИ

АЛГЕБРА,

ПЕРЕВЕДЕННАЯ

СЪ

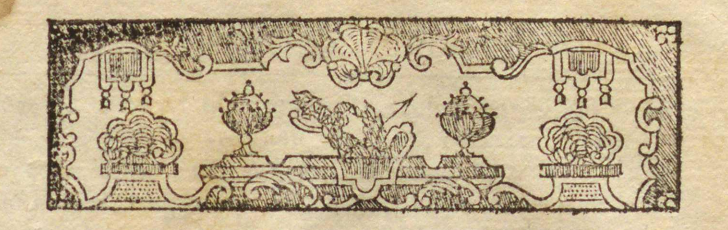
ЛАТИНСКАГО ЯЗЫКА

МАГИСТРОМЪ

Дмитріемъ Аничковымъ.



Печатана при ИмператорскомЪ МосковскомЪ УниверситетѢ, 1765. года.



АНАЛИТИКА СПЕЦІОЗА,

ИЛИ

АЛГЕБРА.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

О

ЛИТЕРАЛЬНОМЪ ИСЧИСЛЕНІИ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ I.

§. 1.

Аналитика (Analyſis) есть наука, изъ данныхъ, или извѣстныхъ нѣкоторыхъ количествъ, находить неизвѣстныя, помощїю сравненїя.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 2. *Спецїоза* (ſpecioſa) называется потому, что въ ней роды, или виды вещей означаются литерами, которыя въ Аналитику первой ввелъ Францискъ Вїета; Алгеброю жъ назвали оную Арапы. Исторїю объ Алгебрѣ пространно изъясняетъ Іоаннъ Валлизїй, въ тр. истор. и практ. том. II. сочин. издан. въ Оксфуртѣ, 1693. года въ листъ. См.

притомъ Гаррис. Лекс. Технич. или Алгеб. Первой, сколько извѣстно, имѣлъ понятіе о такой Аналитикѣ Діофантъ Александрійской, писатель втораго, или третьяго вѣка, котораго въ свѣтѣ находятся VI. книгъ Ариѳметическихъ, съ комментаріями Бахета и Фермація, издан. въ листъ въ Парижѣ 1621, и въ Тулузѣ 1670. год. Въ Европѣ возстановилъ оную Лука де Бурго, въ сочиненіи своемъ, названномъ *сумма объ Ариѳметикѣ и Геометріи, пропорціи и пропорціональности*, на Италіанскомъ языкѣ, издан. въ Венеціи 1494. и 1523. год. въ листъ. Продолженіе жъ упражненія въ оной Аналитикѣ учинили Гіеронъ Карданъ, и Михаилъ Стифелій; а размножили и распространили оную, сверьхъ прочихъ, Франц. Віета, Ѳома Гарріотъ, Картезій, Исаакъ Невтонъ, Лейбницій, Яковъ и Іог. Бернулли, Мархіо Госпиталій. О другихъ Аналитикахъ говорить мѣсто будетъ въ лекціяхъ. Начинающимъ же учиться, чтобъ получить удобнѣйшее знаніе въ литеральномъ исчисленіи, не безполезно имѣть слѣдующихъ авторовъ: и вопервыхъ Еразма Барѳолина *основанія всеобщей Математики*, издан. въ Амстердамѣ 1659. год. въ четверть листа; Берн. Ламія *основанія Математическія* на Франц. языкѣ; Исаака Невтона всеобщую Ариѳм. а для довольнѣйшаго познанія Аналитическихъ способовъ, можно имѣть Карла Рейно *доказанную Аналитику* на Франц. языкѣ, издан. въ Парижѣ 1708. год. въ четверть листа, и Христіана Волфія *начальныя основанія Математической Аналитики*, на Латин. языкѣ том. I. Матем. основан.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 3. Знаки равенства, сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія тѣжъ, какія въ Ариѳметикѣ показаны были (=, +, —, x, :), и здѣсь употребляются. Ежели жъ множимыя числа, или дѣлитель, или дѣлимое число, будутъ состоять изъ

многихъ

многихЪ литерЪ, то составленное изЪ нихЪ количество пишется вЪ скопкахЪ. На пр. $(a + b) d$, значитЪ, что $a + b$ умножено на d, также $(a + b) : d$, значитЪ, что $a + b$ должно раздѣлить на d.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ II.

§. 4. Количества, предЪ которыми ставится знакЪ $+$, и которыя одни, или вЪ началѣ будучи поставлены, не имѣютЪ того знака, *положительныя* (Positiua), или *подтвердительныя* (Affirmatiua), предЪ которыми жЪ находится знакЪ $-$, тѣ *не достаточныя* (priuatiua), или *отрицательныя* (negatiua) называются. Первыя изЪ нихЪ означаютЪ самую вещь, а послѣднія недостатокЪ вещи. Недостаточныя количества весьма пристойно сравниваются сЪ долгомЪ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 5. Чего ради, когда будетЪ придано недостаточное количество кЪ положительному, уничтожится чрезЪ то положительное количество; а когда недостаточное количество вычтется изЪ положительнаго, то вЪ самой вещи будетЪ сложено. Понеже недостатокЪ безЪ придачи не можетЪ уничтоженЪ быть.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 6. Но какЪ одинЪ недостатокЪ бываетЪ больше другаго, такЪ и сумма, или разность недостаточныхЪ неравныхЪ количествЪ правильно принимается.

ЗАДАЧА I.

§. 7. *Сложить простыя и сложныя количества.*

РѢШЕНІЕ.

1. *ВЪ простыхЪ количествахЪ.* Одинакія литеры складываются вЪ одну сумму, и сумма ихЪ означается числомЪ, предЪ ними поставленнымЪ. *На пр.* $a + a = 2a$. Разныя жЪ литеры соединяются знакомЪ $+$. На пр. a и b дѣлаютЪ сумму $a + b$.

2. *Въ сложныхъ количествахъ.*

α. Когда литеры будутъ одинакія, или разныя, а количества положительныя, то сложеніе дѣлается такъ, какъ въ простыхъ числахъ. На пр.

$$\begin{array}{r} a + b \\ 2a + 2b \\ \hline 3a + 3b \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ c + d \\ \hline a + b + c + d \end{array}$$

β. Когда жъ будутъ литеры одинакія, а знаки разные, то въ такомъ случаѣ сложеніе перемѣняется въ вычитаніе, наблюдая притомъ знакъ того количества, изъ котораго дѣлано было вычитаніе (§. 5.). На пр.

$$\begin{array}{r} 3a + 3b \\ a - b \\ \hline 4a + 2b \end{array}$$

γ. Когда литеры и знаки будутъ одинакіе, то сложеніе положительныхъ и недостаточныхъ количествъ дѣлается, наблюдая вездѣ тѣже знаки (§. 6.). На пр.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline 2a - 2b \end{array}$$

δ, Наконецъ, ежели литеры и знаки будутъ разные, то сложеніе дѣлается чрезъ знакъ +, и удерживаются какъ положительные, такъ и недостаточные знаки количествъ. На пр.

$$\begin{array}{r} a + b \\ c - d \\ \hline a + b + c - d \end{array}$$

ЗАДАЧА II.

§. 8. *Вычесть взаимно между собою простыя и сложныя количества.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

1. *Въ простыхъ количествахъ.* Когда литеры будутъ одинакія, то меньшее количество вычитается изъ большаго, и разность означается остаточнымъ числомъ, напереди поставленнымъ. На пр.

$$5a - 2a = 3a$$

Когда жъ количества будутъ означены разными литерами, въ такомъ случаѣ вычитаніе дѣлается, полагая между тѣми количествами знакъ —, что значитъ *меньше* (minus). Положимъ, что изъ a надлежитъ вычесть b, разность будетъ $a - b$.

2. *Въ сложныхъ количествахъ.*

α. Ежели литеры и знаки будутъ одинакіе, и количество, изъ котораго должно вычитать, будетъ больше вычитаемаго, въ такомъ случаѣ вычитаніе дѣлается, такъ какъ въ простыхъ числахъ, и въ остаткѣ наблюдаются тѣже знаки. На пр.

$$\begin{array}{r} 4a + 5b \\ 2a + 3b \\ \hline 2a + 2b \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3a - 4b \\ a - 3b \\ \hline 2a - b \end{array}$$

β. Ежели литеры и знаки будутъ одинакіе, а количество, изъ котораго должно вычитать, будетъ меньше вычитаемаго, то меньшее количество должно вычесть изъ большаго, и предъ остаткомъ поставить знакъ противной (§. 5.). На пр.

$$\begin{array}{r} 3a + b \\ a + 2b \\ \hline 2a - b \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a - 3b \\ a - 4b \\ \hline a + b \end{array}$$

γ. Ежели литеры будутъ одинакія, а знаки разные, въ такомъ случаѣ вычитаніе перемѣняется въ сложеніе, наблюдая знакъ того количества, изъ котораго вычтено (§. 5.) На пр.

$$\begin{array}{r} 4a + 3b \\ a - 2b \\ \hline 3a + 5b \end{array}$$

8. Когда жъ и литеры и знаки будутъ разные, тогда знаки вычитаемаго количества перемѣняются во противные. На пр.

$$\begin{array}{c} a + b \\ c + d \\ \hline a + b - c - d \end{array} \qquad \begin{array}{c} a + b \\ c - d \\ \hline a + b - c + d \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Хотя изъ вышеобъявленныхъ удобно можно разумѣть сiи пра́вила; однако, для изъясненiя втораго и четвертаго случая въ сложныхъ количествахъ, кратко упомянуть должно, почему, изъ $3a + b$ вычетши $a + 2b$, остается $2a - b$. Ибо, ежели при тѣхъ же литерахъ вычитанiе означится зна́комъ —, примѣръ будетъ такимъ образомъ: $3a + b - a - 2b$. Но понеже $-a$ уничтожаетъ a положительное, и $+b$ уничтожаетъ b недостаточное (§. 5.); того ради произойдетъ остатокъ $2a - b$. Въ послѣднемъ же случаѣ, когда цѣлое c, по $c - d$ надлежитъ вычесть, явствуетъ, что надобно придать d, чтобъ не болѣе, какъ должно, вычтено было. Ч. н. д.

ЗАДАЧА III.

§. 9. *Умножить простыя и сложныя количества.*

РѢШЕНIЕ.

1. Въ *простыхъ количествахъ*. Множимыя количества хотя будутъ одинакiя, или разныя, пишутся одно подлѣ друга-

го,

го, и когда предъ ними находятся числа, то и произведенїе оныхъ ставится предъ тѣми литерами. На пр.

$$\frac{a}{\frac{a}{aa}} \qquad \frac{a}{\frac{b}{ab}} \qquad \frac{3a}{\frac{2b}{6ab}}$$

2. *Въ сложныхъ количествахъ.* Умноженїе дѣлается, такъ какъ въ простой Ариѳметикѣ, умножая между собою по порядку всѣ сорты, и притомъ наблюдая одно такое прави́ло: *одинакїе знаки въ произведенїи дѣлаютъ* $+$, *а разные* $-$. На пр.

$$\begin{array}{ccc} a + b & a - b & a + b \\ c + d & c - d & c - d \\ \hline ad + bd & -ad + bd & -ad - bd \\ ac + cb & ac - cb & ac + cb \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Что положительныя количества, будучи умножены взаимно между собою, производятъ положительныя жъ, въ томъ никакого сомнѣнїя не заключается. Но что $+$ и $-$ въ произведенїи дѣлаютъ $-$, сїе явствуетъ изъ слѣдующаго: положимъ, что $(a - b)$ должно умножить на $+c$, возьми $a - b = m$, то будетъ произведенїе изъ c на $a - b = cm$, уничтожь недостаточество, приложивъ съ обѣихъ сторонъ b, будетъ $a = b + m$, и обое сїе будучи умножено на $+c$, производитъ равныя $ca = cb + cm$; и какъ требуется только произведенїе cm, то будетъ $ca - cb = cm$, то есть $-b$ умноженное на $+c$, производитъ $-cb$. Равнымъ образомъ доказывается, что $-$ и $-$ въ произве-

 изве-

изведенїи дѢлаютЪ $+$. ПоложимЪ, что $a-b$ должно умножить на $c-d$. ИзЪ предЪидущаго доказательства явствуетЪ, что произведенїе изЪ $a-b$ на одного множителя, то есть на $+c$, будетЪ $= ac-bc$. Но какЪ требуется также произведенїе изЪ $a-b$ на $-d$, то положимЪ опять $a-b = m$, или $a = b+m$, и будетЪ $-ad = -bd -md$, или $bd-ad = -md$, сложивЪ же всѢ произведенїя, произойдетЪ $ac-bc-ad +bd$. Ч. и д.

ЗАДАЧА IV.

§. 10. *РаздѢлить простыя и сложныя количества.*

РѢШЕНIЕ.

1. *ВЪ простыхЪ количествахЪ.* ИзЪ дѢлимаго количества вычти дѢлитель, и что останется, то будетЪ частное число; понеже оное, будучи умножено на дѢлителя, производитЪ дѢлимое число (§. 66. Ариѳ.). На пр.

$$\begin{array}{c|l} ab & b \\ a & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} abc & ac \\ b & \end{array}$$

Ежели дѢлителя вычесть не можно, вЪ такомЪ случаѢ дѢленїе означается слѢдующимЪ знакомЪ:

$$\begin{array}{c|} ab \\ c \end{array} = ab:c = \frac{ab}{c}$$

2. *ВЪ сложныхЪ количествахЪ.*

a. Ежели дѢлитель содержится вЪ дѢлимомЪ числѢ, то дѢленїе дѢлается такимже образомЪ, какЪ и вЪ простой АриѳметикѢ, то есть, вычитая дѢлитель изЪ дѢлимаго числа, и то, что остается, почитая за частное число; естьли жЪ дѢлитель

будетЪ

будетъ содержаться въ дѣлимомъ числѣ нѣсколько разъ, то дѣлитель до тѣхъ поръ вычитается, пока не будетъ видно, что онъ болѣе не содержится въ дѣлимомъ числѣ (§. 69. Арив.). На пр.

$$\begin{array}{l|l} ac + cb + ad + bd & c + d \\ a + b \quad a + b & \end{array}$$

β. Ежели знаки дѣлимаго числа и дѣлителя будутъ разные, то надлежитъ наблюдать тоже правило, которое въ умноженiи имѣетъ мѣсто, то есть, *одинакiе знаки дѣлаютъ +, а разные —*. На пр.

$$\begin{array}{l|l} ac + cb - ad - bd & c - d \\ a + b \quad a + b & \end{array}$$

γ. Ежели дѣлитель не содержится въ дѣлимомъ числѣ, то дѣленiе означается слѣдующимъ знакомъ:

$$\frac{a + b}{c} \text{ или } (a + b) : c$$

Всѣхъ сихъ случаевъ причина есть слѣдующая: понеже дѣланiе рѣшитъ то, что чрезъ умноженiе совокуплено было (§. 67. Арив.).

ОПРЕДѢЛЕНIЕ III.

§. 11. *Степеньми* (potentiae, siue dignitates) называются тѣ количества, которыя изъ умноженiя тогожъ количества самого на себя, или на свои произведенiя, происходятъ. На пр. $a \times a = aa$; $aa \times a = aaa$.

ПРИМѢЧАНIЕ.

§. 12. Въ такомже смыслѣ слово δυνάμενως, или *степень* употребляетъ и Дiофантъ кн. 1. опред. 2. См. тамже прим. Бахет.

ПРИБАВЛЕНIЕ 1.

§. 13. Для различенiя градусовъ первыхъ степеней, давно уже древнiе выдумали какъ знаки, такъ и особливыя имена.

имена. Но справедливѣе оные градусы степеней числами съ правой руки, повыше радикса ихъ надписанными, и сими словами, *первая степень*, *вторая*, *третья*, *четвертая*, и такъ далѣе означаются. На пр. a^1, a^2, a^3, a^4, a^5. вмѣсто a. aa. aaa. $aaaa$. $aaaaa$. Числа, которыя означаютъ классы и градусы степеней, называются *знаменателями степеней* (exponentes potentiarum).

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 14. И такъ первая степень означаетъ радиксъ, вторая квадратъ, третья кубъ, четвертая биквадратъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 15. Ежели предъ первою степенью поставится нуль, то знаменатели будутъ логариѳмы степеней, продолжающихся въ Геометрической прогрессіи. На пр.

$$o.\ a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.$$
$$1.\ 2.\ 4.\ 8.\ 16$$ и проч. (§. 177. Ариѳ.).

ПРИБАВЛЕНІЕ 4.

§. 16. Слѣдовательно произведенія степеней происходятъ чрезъ сложеніе ихъ знаменателей (§. 180. Ариѳ.). На пр.

$$a^2 \times a^3 = a^5.$$

Частныя жъ ихъ числа находятся, вычитая знаменателя дѣлящей степени изъ знаменателя дѣлимой (§. 181. Ариѳ.). На пр.

$$a^5 : a^2 = a^3.$$

ПРИБАВЛЕНІЕ 5.

§. 17. Когда жъ какую степень, взятую за радиксъ, надобно будетъ возвысить въ степень вышшаго градуса, въ такомъ случаѣ знаменатель степени, представляющей радиксъ, и знаменатель той степени, которая требуется, должно умножить между собою. Пусть будетъ aa радиксъ, и требуется сыскать кубъ его, то есть, третью степень, то будетъ $a^{2 \cdot 3} = a^6$. Ибо сіе происходитъ изъ того, когда aa само на себя, и потомъ на произведеніе $aaaa$ будетъ умножено.

ПРИБАВЛЕНІЕ 6.

§. 18. Обратно, когда надобно будетъ извлечь радиксъ изъ данной степени, знаменатель ея долженъ раздѣленъ быть на знаменателя той степени, коей радиксъ требуется, то есть, для радикса квадратнаго, дѣлится на 2, для кубическаго на 3, а для радикса биквадратнаго, на 4.

Такимъ

Такимъ образомъ радиксъ квадратной изъ a^6 будетъ $a^{6:2} = a^3$, радиксъ кубической изъ $a^6 = a^{6:3} = a^2$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 7.

§. 19. Слѣдовательно о радиксахъ количествъ можно разсуждать такъ, какъ о степеняхъ, коихъ знаменатели суть ломаныя числа (§. 124. Ариѳ.).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ IV.

§. 20. *Ирраціональныя*, или *глухія количества* (irrationales, ſiue ſurdae quantitates) называются тѣ, изъ которыхъ не можно извлечь радикса данной степени (§. 155. Ариѳ.). Такія количества означаются радикальнымъ знакомъ, предъ ними поставленнымъ $\sqrt{}$, надъ которымъ тогда только надписывается знаменатель степени, когда онъ будетъ превышать вторую степень. На пр. $\sqrt{a^5}$ значитъ квадратной радиксъ количества a^5; $\sqrt[3]{a^5}$ значитъ кубической радиксъ тогожъ количества. Ибо ни одинъ изъ нихъ не можетъ найденъ быть совершенной. *Глухія числа* (ſurdi numeri) суть $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{12}$, и проч.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 21. Ирраціональное количество справедливо пишется и безъ знака радикальнаго, раздѣливъ знаменателя глухой степени на знаменателя другой, коей радиксъ требуется. На пр. $\sqrt{a^5} = a^{5:2}$; $\sqrt[3]{a^5} = a^{5:3}$ (§. 18. 19.).

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 22. И глухія количества, такъ какъ дроби, приводятся къ одинакому знаменателю (§. 137. Ариѳ.). На пр. $\sqrt{a^5}$ и $\sqrt[3]{a^7} = a^{5:2}$ и $a^{7:3} = a^{15:6}$ и $a^{14:6}$. Такимъ образомъ оба количества относятся къ шестой степени.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 23. Когда ирраціональное количество, будучи раздроблено на множители, будетъ содержать въ себѣ раціональное, въ такомъ случаѣ изъ сего радиксъ извлеченъ, и предъ знакомъ радикальнымъ поставленъ быть

можетъ,

можетъ, что здѣлавъ, простѣйшее изображенїе получается для онаго количества. Такимъ образомъ вмѣсто $\sqrt{48}$ должно написать $\sqrt{16 \cdot 3}$, и понеже 16 есть квадратъ; того ради надлежитъ извлечь изъ него радикъ, и поставить оной предъ знакомъ радикальнымъ. На пр. $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; также $\sqrt[3]{40}$, или $\sqrt[3]{8 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$, и $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{27 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$.

ПРИБАВЛЕНIЕ 4.

§. 24. Изъ чего явствуетъ, что чрезъ такое приведенїе иногда производятся количества, хотя сами въ себѣ ирраціональныя, но токмо между собою *сообщающїяся и соизмѣримыя* (communicantes et commensurabiles), то есть, которыя содержатся между собою, какъ раціональное количество къ раціональному. На пр. никто не сомнѣвается о томъ, что ирраціональныя количества $4\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$ содержатся между собою, какъ $4:2$, или $2:1$.

ЗАДАЧА V.

§. 25. *Сложить, или вычесть ирраціональныя количества.*

РѢШЕНIЕ.

1. Ежели количества будутъ соизмѣримыя, то надлежитъ складывать, или вычитать одни только тѣ числа, которыя написаны предъ радикальнымъ знакомъ. На пр. $4\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$; или $7\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$.
2. Ежели количества не будутъ соизмѣримыя, то сложенїе и вычитанїе означается чрезъ знаки + и —. На пр.

$$\sqrt{6} + \sqrt{3}, \text{ или } \sqrt{6} - \sqrt{3}.$$

ЗАДАЧА VI.

§. 26. *Умножить между собою ирраціональныя количества, или раздѣлить одно на другое.*

РѢШЕНIЕ.

1. Приведи сперьва данныя количества къ одному знаменателю (§. 22.).

2.

2. Потомъ приведи оныя, ежели можно, въ простѣйшїе термины (§. 23.).

3. Наконецъ количества послѣ знака, и предъ знакомъ радикальнымъ находящїяся, умножь, или раздѣли обыкновеннымъ образомъ. На пр.

$\sqrt{3} . \sqrt{2} = \sqrt{6}$; $2\sqrt{3} . 4\sqrt{3} = 8 . \sqrt{9} = \sqrt{64 . 9} = \sqrt{576} = 24$.

Для дѣленїя. $\sqrt{48} : \sqrt{12} = \sqrt{4} = 2$, то есть, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, и $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, но $4\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 2$, то есть, послѣднее количество въ первомъ содержится дважды.

4. Когда радикальное количество второй степени умножается само на себя, тогда происходитъ изъ того то, что послѣ знака радикальнаго написано было, токмо съ уничтоженїемъ того радикальнаго знака. На пр $\sqrt{3} . \sqrt{3} = 3$. Понеже произведенїе изъ того есть $\sqrt{9} = 3$.

ГЛАВА

ГЛАВА ВТОРАЯ
О
УПОТРЕБЛЕНІИ ЛИТЕРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ ВЪ ИЗОБРѢТЕНІИ ПРА́ВИЛЪ, СЛУЖАЩИХЪ ДЛЯ ИЗВЛЕЧЕНІЯ РАДИКСОВЪ И ПЕРЕМѢНЕНІЯ ВЕЩЕЙ, ТАКЖЕ ДЛЯ СЫСКАНІЯ СВОЙСТВЪ СОДЕРЖАНІЯ АРИѲМЕТИЧЕСКАГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКАГО.

ТЕОРЕМА I.

§. 27.

Дѣйствія Ариѳметическія, которыя дѣлаются чрезъ литеры, подаютъ пра́вила подобныхъ дѣйствій, которыя должно употреблять въ специ̇альныхъ количествахъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже литеры суть общі̇е знаки, которые могутъ означать всякі̇я специ̇альныя количества; того ради, ежели сі̇и будутъ поставлены на мѣсто оныхъ, дѣйствѣ̇я чрезъ литеры учиненныя, показываютъ пра́вила подобныхъ дѣйствѣ̇й въ специ̇альныхъ количествахъ. Ч. и. д.

ЗАДАЧА VII.

§. 28. *Найти свойство и рѣшені̇е квадратовъ.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

1. Возьми двучастной радиксъ, состоящей изъ двухъ членовъ, на пр. $a+b$, и здѣлай изъ того квадратъ (§. 9.) $aa+2ab+bb$, и будетъ извѣстно свойство такого квадрата, котораго радиксъ есть двучастной: то есть, *такой квадратъ содержитъ въ себѣ квадраты частей aa и bb, и притомъ вдвое изятое произведенїе одной части на другую $2ab$.*

2. Рѣшенїе жъ такого квадрата дѣлается такъ, что радиксъ его $a+b$ производится чрезъ нѣкоторое дѣленїе. И чтобъ учинить сїе, то вопервыхъ надлежитъ отдѣлить первой квадратъ отъ двухъ прочихъ членовъ, и радиксъ его a поставить на мѣстѣ частнаго числа. Потомъ найденное первое частное число a, дважды взятое $2a$, должно принять вмѣсто дѣлителя, и по отнятїи онаго, останется b другая часть радикса, котораго квадратъ, будучи вычтенъ, уничтожитъ и послѣдней членъ квадрата. Почему справедливы суть правила, служащїя для извлеченїя квадратнаго радикса, о которыхъ безъ всякаго доказательства изъяснено было въ Ариѳметикѣ (§. 154. Ариѳ.). На пр.

$$\begin{array}{r|cc|l} aa & +2ab & +bb & a+b \\ aa & 2a & b & \\ \hline & & b & \\ \hline 0 & 2ab & +bb & \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

ЗАДАЧА VIII.

§. 29. *Найти свойство и рѣшенїе кубовъ.*

РѢШЕНIЕ.

1. Возьми также двучастнаго радикса $a + b$ квадратъ $aa + 2ab + bb$, и тотже квадратъ умножь на радиксъ, произведенїе $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ будетъ кубъ того радикса (§. 156. Ариѳ.); слѣдовательно специальное свойство всякаго куба есть такое: *кубъ состоитъ изъ кубовъ частей* a^3 *и* b^3, *и притомъ изъ произведенїя каждой части, трижды взятой на квадратъ другой части*, то есть $3aab + 3abb$.

2. Для рѣшенїя куба, чрезъ которое находится радиксъ $a + b$, требуется отдѣлить первой кубъ отъ прочихъ трехъ членовъ, и его радиксъ a принять вмѣсто частнаго числа; для сысканїя жъ втораго частнаго числа b, должно раздѣлить $3aab$ на $3aa$, то есть, на произведенїе изъ квадрата первой части радикса a трижды взятаго, и какъ въ общемъ примѣрѣ куба остается еще $3abb$ и b^3, то видно, что надлежитъ еще дѣлить на произведенїе изъ квадрата новаго частнаго числа, трижды взятаго $3bb$ на первую часть радикса a, и наконецъ вычесть кубъ b^3 новаго частнаго числа. Но вычитанїе такихъ количествъ утверждается на правилахъ извлеченїя радикса кубическаго, на своемъ мѣстѣ (§. 158. Ариѳ.) показаннаго, справедливость которыхъ подтверждается

при-

примѣромъ слѣдующаго всеобщаго исчисленія. На пр.

$$\begin{array}{r|l|l} a^3 & +3aab+3abb+b^3 & a+b \\ a^3 & 3aa+3a & \\ \hline o & \quad b \quad bb \quad b^3 & \\ & 3aab+3abb+b^3 & \\ \hline & o \quad o \quad o & \end{array}$$

Примѣч. равнымъ образомъ находятся правила для извлеченія радиксовъ изъ такихъ степеней, которыя состоятъ въ вышшихъ градусахъ.

ЗАДАЧА IX.

§ 30 *Найти правила для перемѣненія особенныхъ вещей.*

РѢШЕНІЕ.

Сперьва возьми двѣ литеры, потомъ три, четыре, или больше, и отвѣдывай, сколько разъ оныя литеры перемѣшаться, и переложиться могутъ; и понеже нѣтъ никакой такой причины, которая бы препятствовала въ томъ, чтобъ такимже образомъ перемѣненіе многихъ литеръ здѣлано быть не могло; того ради надлежитъ принять тѣ способы перемѣненія, которые нѣсколькими примѣрами ужѐ найдены, для правилъ перемѣненія всякихъ спецїальныхъ количествъ. Извѣстно жъ, что число перемѣненія особенныхъ вещей есть произведеніе всѣхъ единицъ, изъ которыхъ оное число составляется. То есть

ab перемѣн. *ba*, то есть, 1.2 = 2 число показывающее, сколько разъ перемѣниться могутъ двѣ вещи.

abc перемѣн. *bca*, *bac*, *cab*, *cba*, *acb*, *abc*. или, 1.2.3 = 6 число означающее, сколько разъ перемѣниться могутъ три вещи.

abcd, *bcda*, *cdab*, *dabc*, *dcba*, *cbad*
badc, *adcb*, *adbc*, *bcad*, *acbd*, *bdac*
cdba, *bdca*, *cabd*, *dbca*, *acdb*, *dbac*
cadb, *cbda*, *dcab*, *abdc*, *bacd* *dacb*.

или, 1. 2. 3. 4. = 24 число показывающее, сколько разъ перемѣниться могутъ четыре вещи.

Вещи				число перемѣн.
5	-	-	-	120
6	-	-	-	820
7	-	-	-	5040
8	-	-	-	40320
9	-	-	-	362880
10	-	-	-	3628800 и проч.

См. Валлиз. Тракт. о соедин. том. 2. сочин. стран. 485. Яков. Бернул. наук. доказыв. издан. въ Васил. 1713 год. въ четверть листа. Часть II. гл. 1. Лами. стран. 13. и слѣд. Таквет. начальн. основан. Ариѳ. кн. 2. предл. 19.

ЗАДАЧА X.

§. 31. *Найти, какія суммы происходятъ изъ того, когда въ прогрессіи Ариѳметической непрерывной крайніе и средніе члены, находящіеся въ равномъ разстояніи отъ крайнихъ, складываются.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

Представь Ариѳметическую прогрессїю въ литерахъ, наблюдая вездѣ одинакую разность. На пр.

$$\begin{array}{ccc} a,\ a+d, & a+2d,\ a+3d, & a+4d \\ & a+2d, & a+d, & a \\ \hline 2a+4d & 2a+4d & 2a+4d \end{array}$$

Возьми суммы крайнихъ и среднихъ членовъ, и видно будетъ, что оныя равны. И такъ, когда литеры представляютъ какїя нибудь подобныя числа, явствуетъ, что въ Ариѳметической прогрессїи суммы крайнихъ и среднихъ членовъ, или средней вдвое взятой, когда число членовъ будетъ неровное, равны между собою, о чемъ на своемъ мѣстѣ и въ Ариѳметикѣ показано было (§. 103. Ариѳ.).

ЗАДАЧА XI.

§. 32. *Сравнить произведенїе крайнихъ и среднихъ членовъ, состоящихъ въ Геометрической непрерывной прогрессїи.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будутъ члены Геометрической прогрессїи (§. 97. Ариѳ.).

$$\begin{array}{ccc} a,\ ea, & e^2a,\ e^3a, & e^4a \\ & e^2a & ea & a \\ \hline e^4aa. & e^4aa. & e^4aa \end{array}$$

Видно, что произведенїя крайнихъ и среднихъ членовъ, находящихся въ равномъ разстоянїи отъ крайнихъ, равны между собою (§. 110. Ариѳ.).

ЗАДАЧА XII.

§. 33. *Найти, какимъ образомъ члены Геометрическаго содержанія чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, могутъ перемѣниться такъ, чтобъ и послѣ учинившихся перемѣнъ было Геометрическое содержаніе между тѣми членами.*

РѢШЕНІЕ.

Случай 1. *когда будутъ два только члена Геометрическаго содержанія*, на пр.

$$\frac{a : ea}{b \quad b} \text{ умнож.} \qquad \frac{a : ea}{b \quad b} \text{ разд.}$$

$$ab : eab = a : ea \qquad \frac{a}{b} : \frac{ea}{b} = e : ea$$

то они могутъ умножены, или раздѣлены быть на одно третіе число, такъ что содержаніе ихъ, или знаменатель содержанія не перемѣнится (§. 119. 120. Ариѳ.). Понеже въ обоихъ случаяхъ, какъ въ произведеніи, такъ и въ частномъ числѣ, послѣдующей членъ происходитъ изъ умноженія предъидущаго члена на тогожъ знаменателя содержанія (§. 97. Ариѳ.).

Случай 2. *когда будутъ четыре члена непрерывно, или раздѣльно пропорціональные*. На пр.

$a : ea = b : eb$

1. $a : eb = ea : b$ *чрезъ членъ* (alternatim).
2. $ea : a = eb : b$ *обратно* (inuerſe).
3. $a + ea : a = b + eb : b$ (conuerſim).
4. $a + b : ea + eb = a : ea$ (per ſyllepſin).
5. $a - b : ea - eb = a : ea$ (per dialepſin).
6. $a + ea : ea = b + eb : eb$ (compoſite).
7. $ea - a : a = eb - b : b$ (diuiſim).

или $ea - a : ea = eb - b : eb$ И

И умножая и дѣля одинъ которой нибудь членъ, или оба члена содержанія на одно число. На пр.

8. $ac : ea = bc : eb$

9. $a : eac = b : ebc$

10. $\frac{a}{c} : ea = \frac{b}{c} : eb$

11. $a : \frac{ea}{c} = b : \frac{eb}{c}$

12. $ac : eac = b : eb$

13. $\frac{a}{c} : \frac{ea}{c} = b : eb$

Умножая и дѣля на равныя числа. На пр.

14. $ac : eac = bd : ebd$

15. $\frac{a}{c} : \frac{ea}{c} = \frac{b}{d} : \frac{eb}{d}$

И степени чиселъ суть пропорціональныя. На пр.

16. $a^2 : e^2a^2 = b^2 : e^2b^2$

$a^n : e^na^n = b^n : e^nb^n$ (generatim).

$a : ea = b : eb$

17. $ea : eoa = eb : eob$ (ordinate).

$a : eoa = b : eob$ (ex aequo).

$a : ea = b : eb$

18. $ea : eoa = \frac{b}{o} : b$ (perturbate).

$a : eoa = \frac{b}{o} : eb$ (ex aequo).

Въ разсужденіи всѣхъ сихъ показанныхъ перемѣнъ, произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ равны между собою, и никакого сомнѣнія не заключается въ томъ, что такія перемѣны, которыя прежде дѣланы

были въ литерахъ, между четырьмя числами, непрерывно или раздѣльно пропорцїональными, имѣютъ мѣсто (§. 110. Ариѳ.).

ЗАДАЧА XIII.

§. 34. Найти частное число, которое происходитъ, когда разность между первымъ и послѣднимъ членомъ непрерывной Геометрической прогрессїи будетъ раздѣлена на знаменателя, единицею уменьшеннаго.

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ вышепредложенной прогрессїи (§. 32.) разность между первымъ и послѣднимъ членомъ $= e^4 a - a$, знаменатель содержанїя единицею уменьшенной $= e - 1$, то, когда дѣля, будешь вычитать e изъ $e^4 a$, частное число будетъ $e^3 a$; но сїе, на -1 будучи умножено, не можетъ вычтено быть изъ другаго члена дѣлимаго числа̀; слѣдовательно должно придать $e^3 a$, и опять повторять дѣленїе. Но когда ни сїе не уничтожаетъ дѣлимаго числа̀, и остается $e^2 a$, то дѣленїе продолжается до тѣхъ поръ, пока другая дѣлимаго числа̀ часть $- e$ не уничтожится. Производится жъ частное число $e^3 a + e^2 a + e a + a$, то есть, происходятъ всѣ прогрессїи числа, выключая послѣднее число $e^4 a$.

ГЛАВА

ГЛАВА ТРЕТІЯ
О
ИЗОБРѢТЕНІИ И ПРИВЕДЕНІИ ЭКВАЦІЙ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ V.

§. 35.

Экпацїя (aequatio) есть сравненїе двухъ равныхъ количествъ.

ЗАДАЧА XIV.

§. 36. *Припести данную задачу пъ экпацїю.*

РѢШЕНІЕ.

1. Во всякой задачѣ три вещи особливо должно различать и принимать въ разсужденїе: то есть, 1.) количества извѣстныя; 2.) количества неизвѣстныя, и 3.) сравненїе, какое количества извѣстныя и неизвѣстныя имѣютъ между собою.
2. Чтобъ удобнѣе можно было различать извѣстныя количества отъ неизвѣстныхъ, то извѣстныя количества означаются первыми алфавитными литерами a, b, c, а неизвѣстныя послѣдними x, y, z.
3. Иногда извѣстное или неизвѣстное количество полезно изображать чрезъ начальную литеру того слова, которымъ оно означается. Какъ напр. сумма чрезъ литеру c, а разность чрезъ p изображается.
4. Когда неизвѣстныя количества имѣютъ такое отношенїе къ извѣстнымъ, что, спознавъ одно изъ нихъ, будутъ извѣстны и прочїя чрезъ сравненїе съ извѣстны-

ми, въ такомъ случаѣ, для означенія неизвѣстныхъ количествъ, довольно и одной литеры. На пр. когда разность неизвѣстныхъ количествъ дана, то она съ меньшимъ количествомъ будучи сложена, производитъ бо́льшее количество.

5. Послѣ жъ того, какъ учинено будетъ наименованіе извѣстныхъ и неизвѣстныхъ количествъ, разсуждать должно о томъ, какое взаимное отношеніе имѣютъ они между собою, чтобъ изъ сравненія ихъ можно было произвести два равныя количества; ибо сіи, зна́комъ равенства между ими поставленнымъ будучи соединены между собою, дѣлаютъ эквацію.

6. Надлежитъ стараться, чтобъ всѣ находящіяся въ эквацiи извѣстныя и неизвѣстныя количества сравнены были между собою.

7. Но когда неизвѣстныхъ количествъ, особливыми литерами означенныхъ, будетъ много, въ такомъ случаѣ надлежитъ дѣлать столько эквацій, сколько есть неизвѣстныхъ количествъ.

На пр. дается сумма и разность двухъ количествъ, и требуется найти самыя тѣ неизвѣстныя количества.

Пусть будетъ сумма $= a$, разность $= d$, большое количество $= y$, а меньшое $= x$, то видно, что количества имѣютъ между собою двоякое отношеніе, въ разсужденіи суммы, и въ разсужденіи разности, потому что два неизвѣстныя количе-

личества, вмѣстѣ взятыя, равняются суммѣ; слѣдовательно

$$a = x + y$$

и меньшое вычетши изъ большаго, останется остатокъ равной разности, то есть,

$$d = y - x$$

Удобнѣе жъ здѣлается наименованїе количествъ, когда, вмѣсто большаго количества, къ меньшому придана будетъ разность, и потому тѣ два неизвѣстныя количества будутъ изображены такимъ образомъ: меньшое $= x$, а большое $= x + d$; чего ради $a = 2x + d$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VI.

§. 37. *Членами экваціи* (membra aequationis) называются самыя тѣ количества, которыя соединяются между собою знáкомъ равенства. На пр. въ предъидущей экваціи, d есть *первой членъ*, а $y - x$ *второй членъ экваціи*.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VII.

§. 38. Эквацїя, въ разсужденїи числа̂ измѣренїй неизвѣстнаго количества, есть или *простая* (ſimplex), въ которой неизвѣстное количество будетъ первая степень, или радиксъ; или *квадратическая* (quadratica), *кубическая* (cubica), *биквадратическая* (biquadratica), въ которой неизвѣстное количество будетъ вторая, третья, или четвертая степень. На пр.

$a^2 + b^2 = x^2$ квадратическая
$a^3 - b^3 = x^3$ кубическая, и проч.

ПРИМѢ-

ПРИМѢЧАНІЕ.

§ 39. Въ настоящемъ введеніи въ Алгебру далѣе квадратическихъ эквацій простираться не будемъ; понеже изъясненіе прочихъ эквацій есть продолжительнѣйшее, такъ что въ семъ сокращеніи довольно ясно протолковано быть не можетъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VIII.

§. 40. *Эквація квадратическая не полная, или не совершенная* (aequatio quadratica affecta, siue imperfecta) называется, въ которой не достаетъ квадрата извѣстнаго количества. На пр. $xx + 2ax = b^2$. Видно изъ §. 28. что здѣсь не достаетъ квадрата aa которой придавъ съ обѣихъ сторонъ, произойдетъ совершенная эквація $xx + 2ax + aa = bb + aa$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ IX.

§. 41. *Приведеніе эквацій* (reductio aequationum) есть практика, чрезъ которую неизвѣстныя количества отдѣляются отъ извѣстныхъ, и дѣлается то, чтобъ знаменованіе неизвѣстнаго количества изображалось равными знаками.

ЗАДАЧА XV.

§. 42. *Здѣлать приведеніе эквацій.*

РѢШЕНІЕ.

1. Понеже извѣстно изъ свойства равныхъ количествъ (§. 25. 26. Ариѳ.), что чрезъ сложеніе и вычитаніе равныхъ изъ равныхъ, или чрезъ умноженіе и дѣленіе равныхъ на равныя, или чрезъ извлеченіе подобныхъ радиксовъ, или наконецъ чрезъ произведеніе подобныхъ степеней, равенство количествъ не уничтожается; того

ради,

ради, чтобъ извѣстныя количества, съ неизвѣстными перемѣшенныя, могли отдѣлены быть отъ оныхъ, надлежитъ вычтенныя количества складывать, сложенныя вычитать, раздѣленныя умножать, умноженныя дѣлить, изъ степеней извлекать радиксъ, или, когда надобно будетъ, изъ радикса дѣлать степени, и такимъ образомъ наконецъ произойдутъ два члена эквацїи, изъ которыхъ одинъ членъ будетъ изображать извѣстныя токмо количества, а другой неизвѣстное, чрезъ извѣстныя изъясненное. На пр.

$x - 4 = 16$

$x = 16 + 4$ слож.

$x + 4 = 24$

$x = 20.$ вычтен.

$\frac{x}{3} = 6$

$x = 18$ умнож.

$3x = 12$

$x = 4$ раздѣл.

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16} = 4$ извлеч. рад.

2. Когда жъ въ задачѣ случатся два неизвѣстныя количества, и для того оная задача (§. 36. нум. 5.) будетъ приведена въ двѣ эквацїи, въ такомъ случаѣ должно сперьва изслѣдовать знаменованїе одного неизвѣстнаго количества, и оное въ другой эквацїи, которая содержитъ въ себѣ оное неизвѣстное количество, поставить на мѣсто сего, чтобъ имѣть

новую

новую эквацїю, вѣ которой другое неизвѣстное количество уничтожено. Ибо послѣ того, какѣ сїе неизвѣстное количество будетѣ сравнено сѣ извѣстными, потому что отношенїе его кѣ другому неизвѣстному количеству явствуетѣ изѣ первой эквацїи, можетѣ найдено быть и другое неизвѣстное количество. На пр.

$$a = x + y \qquad d = y - x$$
$$d + x = y$$
$$a - x = y$$
$$a - x = d + x$$
$$a = d + 2x$$
$$a - d = 2x$$
$$\frac{a - d}{2} = x$$

Слѣдовательно, сыскавѣ d и x, будетѣ также извѣстно и y.

ЗАДАЧА XVI.

§ 43. *Рѣшить неполную квадратическую эквацїю.*

РѢШЕНІЕ.

Сѣ обѣихѣ сторонѣ должно придать по недостаточествующему квадрату извѣстнаго количества, и изѣ совершеннаго квадрата извлечь радиксѣ; естьлижѣ тоже самое учинено будетѣ и вѣ другой части, то квадратическая эквацїя приведется вѣ простую (§. 39. 41.). На пр.

$$x^2 + ax = bb$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \quad \text{прилож.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = bb + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{bb + \tfrac{1}{4}a^2}$$
$$x = \sqrt{(bb + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
объ
АНАЛИТИКѢ АРИѲМЕТИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

ЗАДАЧА XVII.

§. 44.

Дана сумма и разность двухъ количествъ, найти самыя количества.

РѢШЕНІЕ ПЕРВОЕ СПЕЦІАЛЬНОЕ.

Пусть будетъ сумма $= 48$, разность $= 12$, меньшое количество $= x$, большое, или меньшое сложенное съ разностью $= x + 12$, то будетъ эквація

$$2x + 12 = 48$$
$$2x = 36$$
меньшое $x = 18$
большое $x + d = 30$ (§. 35. 41.).

РѢШЕНІЕ ВТОРОЕ ВСЕОБЩЕЕ.

Означь данныя количества литерами, чтобъ по учиненіи приведенія, вообще извѣстно было, какимъ образомъ надлежитъ дѣлать рѣшеніе для специальныхъ примѣровъ (§. 27.). На пр.

пусть будетъ сумма $= a$
разность $= d$
меньшое количество $= x$
большое $= x + d$

то

то будетъ

$$2x + d = a$$
$$2x = a - d$$
$$x = \frac{a - d}{2}$$

Теорема, или пра́вило происходитъ изъ того слѣдующее: *изъ данной суммы вычти данную разность, остатокъ раздѣли на двѣ части, половина покажетъ неизвѣстное меньшое количество, къ сему приложи разность, и произойдетъ большое количество.*

РѢШЕНІЕ ТРЕТІЕ.

Когда неизвѣстныя количества будутъ означены особливыми литерами, на пр. сумма $= a$, разность $= d$, меньшое количество $= x$, большое $= y$, то будетъ

$$a = x + y \qquad d = y - x$$
$$a - x = y \qquad d + x = y$$

Чтобъ уничтожить y, соедини между собою два количества, равняющїяся одному третьему, и будетъ

$$a - x = d + x$$
$$x \qquad x$$
$$a = d + 2x$$
$$a - d = 2x$$
$$\frac{a - d}{2} = x$$

и такимъ образомъ тоже прежнее пра́вило, меньшое количество, опять выходитъ.

ЗАДАЧА XVIII.

§. 45. *Найти такїя количества, которыхъ дано содержанїе и разность.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ СПЕЦІОНАЛЬНОЕ.

Положимъ, что разность $= 45$, содержаніе шестерное, или знаменатель содержанія $= 6$, меньшое количество $= x$, большое $= 6x$, то будетъ эквація $5x = 45$, или $x = 9$, что приложивъ къ разности 45, будетъ большое количество 54.

РѢШЕНІЕ ВСЕОБЩЕЕ.

Положимъ, что разность $= b$, знаменатель содержанія $= e$, меньшое количество $= x$, большое $= ex$, то будетъ эквація:

$$ex - x = b$$

или $$x = \frac{b}{e - 1}$$

Теорема: *разность раздѣли на знаменатель содержанія, уменьшенной единицею, частное число будетъ меньшое количество.*

ЗАДАЧА XIX.

§. 46. *Найти такое количество, послѣ котораго бы, какъ будутъ вычтены изъ него двѣ нѣсколькія данныя части, остался данной остатокъ.*

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что неизвѣстное количество $= x$, нѣсколькія части $= e$ и i, остатокъ $= b$, то будетъ эквація:

$$x - \frac{x}{e} - \frac{x}{i} = b$$

И приведши дроби къ одному знаменателю, будетъ

 eix

$$\frac{eix - ix - ex}{ei} = b$$

$$eix - ix - ex = eib$$

$$x = \frac{eib}{ei - i - e}$$

Теорема, или пра́вило: *данной остатокъ умножь на произведеніе знаменателей содержанія, произведеніе раздѣли на тоже произведеніе, уменьшенное каждымъ знаменателемъ содержанія, и произойдетъ искомое количество.*

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 47. Равнымъ образомъ находится пра́вило для остатка, которой остается послѣ вычитанія трехъ, или больше нѣсколькихъ частей.

ЗАДАЧА XX.

§. 48. *Дана сумма каждыхъ двухъ чисель изъ трехъ, найти оныя три числа.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будутъ искомыя числа x, y, z, сумма перваго и втораго $= a$, сумма втораго и третьяго $= b$, сумма перваго и третьяго $= c$, то произойдутъ изъ того три экваціи:

$$x + y = a \qquad y + z = b \qquad x + z = c$$
$$x = a - y \qquad z = b - y \qquad x = c - z$$

Понеже для x находится двоякая эквація; того ради будетъ

$$a - y = c - z$$

Въ послѣднемъ членѣ вмѣсто z поставь равное $b - y$, и будетъ

$$a - y = c - b + y$$

И такъ одно неизвѣстное количество y изъ сихъ извѣстныхъ найдется такимъ

обра-

образомъ, когда съ обѣихъ сторонъ придашь y. На пр.

$$a = c - b + 2y$$
$$a - c + b = 2y$$
$$\frac{a - c + b}{2} = y$$

Сыскавъ y, и прочія неизвѣстныя количества могутъ выведены быть изъ первыхъ эквацій, потому что

$$x = a - y$$
$$z = b - y$$

Положимъ, что $a = 40$, $b = 28$, $c = 36$, то вмѣсто y будетъ $\frac{40 - 36 + 28}{2} = 16$

$$x = 40 - 16 = 24$$
$$z = 28 - 16 = 12$$

ЗАДАЧА XXI.

§. 49. *Дана сумма двухъ количествъ и разность ихъ квадратовъ, найти самыя тѣ количества.*

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что сумма $= 2a$, разность квадратовъ $= 2x$, то будетъ большое количество $= a + x$, меньшое $= a - x$ (§. 50. Триг. плоск.), квадраты ихъ $= a^2 + 2ax + x^2$

$$a^2 - 2ax + x^2$$

разность $4ax = b$

$$x = \frac{b}{4a}$$

Теорема: *разность квадратовъ раздѣли на сумму количествъ, вдвое взятую, частное число покажетъ половину ихъ разности.*

Но знавъ половину разности и половину суммы, будутъ извѣстны и самыя количества по §. 50. Триг. плоск.

ЗАДАЧА XXII.

§. 50. *Дано произведенїе и разность двухъ количествъ; найти самыя количества.*

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что произведенїе $= a$, разность $= b$, большое количество $= x$, меньшое $= y$, то будетъ двоякая эквацїя:

$$xy = a \qquad x - y = b$$

$$x = \frac{a}{y} \qquad x = b + y$$

$$\frac{a}{y} = b + y$$

$$a = by + yy$$

Приложивъ недостаточествующей квадратъ $\frac{1}{4} b^2$ къ неполной квадратической эквацїи (§. 42.), будетъ

$$\tfrac{1}{4} b^2 + a = \tfrac{1}{4} b^2 + by + yy$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 + a)} = \tfrac{1}{2} b + y$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 + a)} - \tfrac{1}{2} b = y$$

Теорема: *къ квадрату половинной разности приложи произведенїе количествъ, и извлеки радиксъ, изъ котораго опять вычти половину разности, и останется искомое меньшое количество.*

ЗАДАЧА XXIII.

§. 51. *Дана цѣна двухъ житкихъ тѣлъ, которыя надлежитъ смѣшать между собою, и притомъ цѣна смѣшеннаго количества, найти, сколько изъ дешеваго надлежитъ прибавить къ тому, которое дороже, чтобъ произошла изъ того мѣра, которую должно продавать за среднюю цѣну.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что цѣна дорогаго $= a$ количество дешеваго $= x$
——— дешеваго $= b$ цѣна онаго $= bx$;

потому что служитъ здѣсь такая пропорція $1 : b = x : bx$

цѣна смѣшеннаго $= c$ количество дорогаго $= 1 - x$
мѣра $= 1$ цѣлаго онаго $= a - ax$.

Понеже $1 : a = 1 - x : a - ax$; того ради, сложивъ цѣну обѣихъ частей, составится данная цѣна смѣшеннаго количества, и произойдетъ такая эквація:

$$a - ax + bx = c$$
$$a = ax - bx + c$$
$$a - c = ax - bx$$
$$\frac{a - c}{a - b} = x$$

Теорема: *разностъ между большою и среднею цѣною должно раздѣлить на разностъ большой и меньшой цѣны, частное число покажетъ количество дешеваго, сколько онаго надлежитъ смѣшать съ дорогимъ.* Положимъ, что $a = 18$, $b = 12$, $c = 14$, то будетъ $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, по чему изъ дорогаго надобно взять $\frac{1}{3}$, и такъ $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Такимъ образомъ находятся правила для смѣшенія житкихъ тѣлъ.

ЗАДАЧА XXIV.

§. 52. *Данъ вѣсъ тѣла, составленнаго изъ золота и серебра, и притомъ уронъ вѣсу, которой, какъ смѣшенное тѣло, такъ и тѣ два металла, изъ которыхъ оно состоитъ, будучи равнаго вѣсу, теряютъ въ водѣ, найти доли золота и серебра, которыя находятся въ смѣшенномъ тѣлѣ.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ общей вѣсъ $=p$, уронъ вѣсу, которой серебро теряетъ въ водѣ, $=a$, уронъ вѣсу отъ золота $=b$, уронъ вѣсу отъ смѣшеннаго тѣла $=c$, вѣсъ смѣшенной доли изъ серебра $=x$, вѣсъ смѣшенной доли изъ золота $=y$. Понеже извѣстенъ уронъ вѣсу, которой золото и серебро, одного вѣсу съ смѣшеннымъ тѣломъ, будучи опущено въ воду, теряетъ, то чрезъ тройное правило могутъ найдены быть уроны вѣсу, соотвѣтствующіе смѣшенной долѣ изъ золота и серебра; ибо показанные уроны, поколику соотвѣтствуютъ вѣсу выдавленной воды, имѣютъ прямое содержаніе къ кускамъ тогожъ метала (§. 19. Гидростат.), то есть.

$$p : x = a : \frac{ax}{p}$$

$$p : y = b : \frac{by}{p}$$

Но сумма сихъ554 уроновъ равняется урону вѣсу смѣшеннаго тѣла, то есть

$$\frac{ax + by}{p} = c$$

Чтобъ въ экваціи уничтожить одно неизвѣстное количество, то вмѣсто y надлежитъ поставить $p - x$, что здѣлавъ, произойдетъ такая эквація:

$$\frac{ax + bp - bx}{p} = c$$

$$ax + bp - bx = pc$$

$$ax - bx = pc - bp$$

$$x = \frac{pc - bp}{a - b}$$

здѣ-

Здѣлай изъ сей эквацiи пропорцiю, и будетъ $a - b : p = c - b : x$.

Теорема: для доли тяжелѣйшаго металла, или смѣшеннаго серебра посылай: *какъ разность урона вѣсу отъ серебра и золота, потеряннаго въ подѣ, содержится къ общему вѣсу, такъ разность урона вѣсу отъ смѣшеннаго тѣла и золота, потеряннаго въ подѣ жъ, будетъ содержаться къ смѣшенной долѣ изъ серебра.* Которую сыскавъ, будетъ извѣстна и смѣшенная доля изъ золота.

ПРИБАВЛЕНIЕ.

§. 53. Такимъ образомъ рѣшится задача Архимедова, которой, сколько серебра золотыхъ дѣлъ мастеръ примѣшалъ въ золотую корону, по прошенiю Сиракузскаго Государя, первой изобрѣлъ и нашелъ, по свидѣтельству Витрувiеву Архитек. кн. 9. гл. 3. Положимъ, что вѣсъ короны $= 6$ либр. столькожъ либръ серебра теряютъ своего вѣсу въ водѣ $\frac{3}{5}$, а золота $\frac{3}{10}$, вся же корона теряетъ своего вѣсу $\frac{4}{10}$, то произойдетъ изъ того такая пропорцiя:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{10} : 6 = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} : x$$
$$\frac{3}{10} : 6 = \frac{1}{10} : 2$$

Слѣдовательно двѣ либры серебра приложены были къ четыремъ либрамъ золота. См. Шотт. Магiи натуральн. часть III. кн. 5. Синтагм. 2. прагм. 3. стран. 342. и слѣд.

ПРИМѢЧАНIЕ.

§. 54. Больше примѣровъ для Ариѳметическихъ задачъ, которыя рѣшены Алгебраическимъ образомъ, можно видѣть во многихъ Авторахъ. См. Лам. матем. основ. часть II. том. I. матем. курс. стран. 36 Iогн. Керс. основ. Алгебр. кн. 1. гл. 14. I. Стурм. сокращен. матем. или матем табл. стран. 5. Гвил. Уггтред. въ матем. соч. стран. 87. нарочно изъясняетъ Дiофант. задачи.

ГЛАВА ПЯТАЯ
объ
АНАЛИТИКѢ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ X.
§. 55.

Конструкція Геометрическая (constructio Geometrica) называется такой способъ, помощію котораго члены Аналитическихъ эквацій изображаются въ нѣкоторыхъ линѣяхъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 56. Когда въ сей практикѣ на мѣсто аналитическихъ видовъ опредѣляются линѣи, то надлежитъ примѣчать отношеніе количествъ, которыя содержатся въ эквацій, и стараться о томъ, чтобъ такое жъ сравненіе наблюдаемо было, по соединеніи между собою правильнымъ образомъ Ариѳметическихъ и Геометрическихъ истиннъ. Что, какимъ образомъ можетъ учинено быть, будетъ показано ясными примѣрами.

ЗАДАЧА XXV.

§. 57. *Здѣлать простыя экпацїи.*

РѢШЕНІЕ.

1. $x = a$, то есть данной линѣѣ a равняется неизвѣстная x.
2. $x = a + b$, или $x = a - b$, явствуетъ, что литера x означаетъ сумму или разность извѣстныхъ линѣй a и b.
3. $x = \frac{a}{b}$, то есть, литера x изображаетъ содержаніе данныхъ линѣй a и b.

4. $x = \frac{ab}{c}$, здѣлай изъ сего пропорцїю, $c : a = b : x$, то есть, x есть четвертая пропорцїональная линѣя къ тремъ даннымъ c, a, b. (§. 97. Геом.).

5. $x = \frac{ac + bc}{d + b}$, здѣлай опять пропорцїю, $d + b : c = a + b : x$.

6. $x = \frac{ab + cd}{m + n}$, настоящей случай приведи въ предѣидущей, то есть посылай:

$a : c = d : p$ (§. 97. Геом.).
$ap = cd$ (§. 110. Геом.).

Вмѣсто cd поставь ap, и будетъ такая эквацїя:

$$x = \frac{ab + ap}{m + n}$$

или $m + n : b + p = a : x$.

ЗАДАЧА XXVI.

§. 58. *Здѣлать квадратическїя эквацїи.*

РѢШЕНIЕ.

1. $x^2 = ab$, или по причинѣ пропорцїи, $a : x = x : b$ (§. 110. Ариѳм.) будетъ x средняя пропорцїональная линѣя между a и b (§. 119. Геом.).

2. $x^2 = ab + cd$.
то есть, $x = \sqrt{(ab + cd)}$.

Потомъ найди среднїя пропорцїональныя линѣи между a и b, также между c и d.
то есть, $a : m = m : b$, $c : n = n : d$

Почему $x = \sqrt{(mm + nn)}$. Составленїе чего показываетъ теорема Пиѳагорова (§. 193. Геом.),

Геом.), то есть, дѣлается прямоугольной треугольникъ изъ боковъ m и n, гипотенуза покажетъ $\sqrt{(mm + nn)}$.

3. $x^2 = \frac{a^2bc}{mn}$

Здѣлай $m : a = a : r$

$$mr = aa \text{ и } \frac{mrbc}{mn} = \frac{rbc}{n} = xx$$

также $n : r = b : s$

$$ns = rb \text{ и } \frac{nsc}{n} = sc = xx.$$

или x есть средняя пропорцїональная линѣя между s и c.

4. $x^2 = ax + bb$
$x^2 - ax = bb$
$x^2 - ax + \frac{1}{4} aa = bb + \frac{1}{4} aa$
$x = \sqrt{(bb + \frac{1}{4} aa} + \frac{1}{2} a$ (§. 43.).

Помощїю Пиѳагоровой теоремы находится такой радиксъ, къ которому присовокупляется $\frac{1}{2}$ a.

5. Ежели надобно будетъ здѣлать $\sqrt{(\frac{1}{4} aa - bb)}$, то на $\frac{1}{2} a$, такъ какъ на поперечникѣ, опиши полукружїе, и на оное перенеси A B $= b$, бокъ B C будетъ искомой

Ф. 1. радиксъ (§. 195. Геом.).

ЗАДАЧА XXVII.

§. 59. *Въ прямоугольномъ четыреугольни-*

Ф. 2. *кѣ* A B C D *написать Ромбъ* A E F D.

РѢШЕНIЕ.

Надлежитъ найти частицу B E или F C, которую должно отсѣчь отъ бо́ка прямоугольнаго четыреугольника, чтобъ остался бокъ ромба. Пусть будетъ A B $= a$, BD $= b$,

$= b$, BE $= x$, то будетъ AE $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 195. Геом.). Но AE $=$ ED и BE $=$ BD $-$ BE $= b - x$; ибо по Пиѳагоровой теоремѣ □ AB $+$ □ BE $=$ □ AE $=$ □ ED, изъ чего происходитъ слѣдующая пропорцїя:

$$a^2 + x^2 = bb - 2bx + xx$$
$$a^2 + 2bx = bb$$
$$2bx = bb - aa$$
$$x = \frac{bb - aa}{2b}.$$

Конструкцїя дѣлается помощїю Пиѳагоровой теоремы, сыскавъ четвертую пропорцїональную линѣю

$$2b : b + a = b - a : x \text{ (§. 57.)}.$$

Понеже извѣстно, что произведенїе изъ $b + a$ на $b - a$ есть $bb - aa$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XI.

§. 60. *Линѣя въ среднемъ и крайнемъ содержанїи раздѣленная* (linea media et extrema ratione secta) называется, когда составленной изъ отрѣзковъ AB и AC прямоугольной четыреугольникъ равняется квадрату большей части AB. Или, когда вся линѣя AC къ большому отрѣзку AB имѣетъ такое содержанїе, какое большой отрѣзокъ AB къ меньшому BC. Ф. 3.

ЗАДАЧА XXVIII.

§. 61. *Раздѣлить линѣю въ среднемъ и крайнемъ содержанїи.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ вся линѣя AC $= a$, большая доля AB $= x$, то будетъ BC $= a - x$, и

$$a : x = x : a - x$$
$$a^2 - ax = xx$$
$$a^2 = ax + xx$$
$$a^2 + \frac{1}{4} a^2 = xx + ax + \frac{1}{4} a^2$$
$$V(a^2 + \frac{1}{4} a^2) - \frac{1}{2} a = x$$

Конструкція дѣлается по 4. нум. §. 58.
Ф. 4. То есть, ко всей линѣѣ AC приложи подъ прямымъ угломъ половинную ея часть AD, и изъ центра D полупоперечникомъ DC опиши дугу CE такимъ образомъ, чтобъ было $DC = DE = V\, a^2 + \frac{1}{4} a^2$) (§. 193. Геом. Но понеже $AD = \frac{1}{2} a$, то будетъ $AE = x$.

ЗАДАЧА XXIX.

§. 62. *Дана разность боковъ прямоуголь-*
Ф. 5. *наго треугольника AE, и перпендикулъ BD, которой изъ прямаго угла опущенъ на гипотенузу, найти гипотенузу.*

РѢШЕНІЕ.

Понеже разность $AE = a$, $BD = b$, гипотенуза $AC = x$, сумма боковъ $AB + BC = y$; того ради большой бокъ $AB = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} a$, а меньшой $BC = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} a$ (§. 50. Триг. плоск.), и по § 193. Геом. будетъ

$$\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} a^2 = x^2$$
$$y^2 + a^2 = 2 x^2$$
$$y^2 = 2xx - aa$$

Но понеже $BC : BD = AC : AB$ (§. 121. Геом.), то будетъ

$$\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} a : b = x : \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} a$$
$$bx = \frac{1}{4} yy - \frac{1}{4} aa$$
$$4bx = yy - aa$$
$$4bx + aa = yy$$

По-

Поставь знаменованїе $xx = 2xx - aa$, и будетъ

$$4bx + aa = 2xx - aa$$
$$4bx + 2aa = 2xx$$
$$2aa = 2xx - 4bx$$
$$aa = xx - 2bx$$
$$aa + bb = xx - 2bx + bb$$
$$\sqrt{(aa + bb)} + b = x.$$

Здѣлай $\sqrt{(aa+bb)}$ по 4. нум. §. 58, приложи къ немужъ b, и произойдетъ гипотенуза x, которую сыскавъ, и самой треугольникъ, которому приличествуетъ данная боковъ разность, составится слѣдующимъ образомъ: здѣлай прямой уголъ, и съ обѣихъ сторонъ къ боку онаго приложи перпендикулъ $= x$, то будетъ гипотенуза $GI = \sqrt{xx}$, на которой опиши полкруга, и въ ономъ проведи хорду $GH = a$, будетъ $HI = \sqrt{(2xx - aa)} = y$ (§. 195. Геом.); знавши жъ сумму боковъ $= y$, и разность $= a$, удобно можно будетъ найти самые бока, и изъ оныхъ потомъ составить искомой треугольникъ (§. 50. Триг. плоск.). ф. 6.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 63. Употребленїе Алгебры въ Геометрїи множайшими примѣрами показываютъ Г. Уггтредъ въ ключ. матем. Франц. Шоотен. упражнен. матем. кн. 1. Стурм. въ изъяснен. матем. и Вольф. Элем. Аналит. гл. 4. Остается только показать, какимъ образомъ свойство коническихъ и другихъ кривыхъ линѣй содержится въ Аналитической эквацїи, и оттуда происходятъ свойства оныхъ.

ГЛАВА

ГЛАВА ШЕСТАЯ
О
НАТУРѢ И СВОЙСТВАХЪ КРИВЫХЪ ЛИНѢЙ, И ВОПЕРЬВЫХЪ КОНИЧЕСКИХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XII.

§. 64.

Когда конусъ A B C пересѣкается линѣею I K, противоположенному конуса боку A B параллельною, то происходитъ изъ того кривая линѣя, которая называется *парабола* (parabola); естьлижъ сѣченіе здѣлается чрезъ линѣю H G, такъ что она, будучи продолжена, съ противоположеннымъ конуса бокомъ A C, продолженнымъ въ M, соединится, то будетъ *гипербола* (hyperbola); наконецъ, ежели сѣченіе будетъ учинено линѣею E L, наклоненною къ оси конуса такимъ образомъ, что она, будучи продолжена, соединится въ точкѣ O съ продолженнымъ основанія поперечникомъ, происходитъ *эллипсисъ* (ellipſis). И три такія кривыя линѣи, произшедшія изъ сѣченія конуса, называются *сѣченіями конуса* (ſectiones coni).

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 65. Такія коническихъ сѣченій имена, взятыя отъ свойства оныхъ, первой употребилъ Аполлоній Пергей. Ибо древніе Геометры троякой только конусъ, то есть прямоугольной, остроугольной

и

и тупоугольной, линѣею къ боку его перпендикулярною пересѣченной разсуждали, и сѣченіе прямоугольнаго конуса *параболою*, сѣченіе остроугольнаго конуса *Эллипсисомъ*, и сѣченіе тупоугольнаго конуса *гиперболою* назвали. Сей доводъ пространнѣе изъяснен въ *схедїазмѣ* (in schediasmate), гдѣ приписывается честь Аполлонїю за продолженную науку о кривыхъ линѣяхъ, и которая вмѣстѣ съ упражненїемъ о Меркурїальномъ фосфорѣ въ свѣтъ произошла. Изъ восьми жъ коническихъ книгъ, которыя въ третьемъ вѣку прежде Эры Христїанской написалъ Аполлонїй, четыре только остались въ цѣлости, и издан. Федер. Коммандин. на Латин. языкѣ въ Бононїи 1566. год. въ листъ. На которые книги издалъ Комментарїи Клавдїй Ришардъ въ Антверпенѣ 1655. год. въ листъ. Пятую жъ, шестую и седьмую книгу, изъ Арапской, Равїановой и Голїановой книги, а восьмую изъ свидѣтельствъ Папп. о содержанїи ея дополнилъ, и такимъ образомъ VIII. книгъ коническихъ Аполлонїя Пергея возстановилъ Едмундъ Галлей въ Оксфуртѣ 1710. год. въ листъ. Цѣлую о томъ главу нарочно преподаютъ и изъясняютъ Григорїй *a s.* Vincentio X. кн. о квадратурѣ круга и сѣченїи конуса издан. въ Антверпенѣ 1647. год. въ листъ. Филиппъ де ла Гире о сѣченїяхъ коническихъ издан. въ Парижѣ 1685. год. въ листъ. Оцанамъ въ тракт. о линѣяхъ перваго роду издан. 1687. год въ 4. л. Маркизъ де Лопиталь въ Аналитич. тракт. о сѣченїяхъ коническихъ издан въ Париж. 1707. въ 4. л.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XIII.

§. 66. Прямая линѣя чрезъ средину конической линѣи проведенная AB *ось* (axis), начало ея A, или точка соединенїя оси и кривой линѣи, *перьхъ* (vertex), приложенная къ оси, и ею на-двѣ части раздѣленная линѣя ф. 8.

нѣя MN *ордината* (ordinata), половинная той линѣи часть PM *семїордината* (Semiordinata), часть оси между верьхомъ и ординатою находящаяся AP *абсцисса* (Abscissa) называется.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XIV.

§. 67. *Параметръ* (parameter), или *прямой бокъ* (rectum latus) конической линѣи есть, котораго произведенїе на абсциссу сравнивается съ квадратомъ семїордїнаты. *Фокусъ же* (focus), или *зажигательная точка* есть такая точка оси, гдѣ параметръ опредѣляетъ ординату.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XV.

§. 68. *Дїаметръ*, или *поперечникъ* (Dia-
Ф. 9. meter) Эллипсиса называется такая линѣя, которая чрезъ средину кривой линѣи проведенная раздѣляетъ другїя прямыя поперечныя линѣи на́ двѣ части. *Поперечникъ же спязанной*, или *соединенной* (Diameter coniugata) BE есть прямая линѣя, которая съ другимъ поперечникомъ AF параллельныя пересѣкаетъ на́-двѣ части. Или соединенной поперечникъ BE есть, которой другаго поперечника AF ординатамъ MN параллеленъ.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XVI.

§. 69. *Поперечной дїаметръ* (Transuersa
Ф. 7. Diameter) есть линѣя HM, которая между двумя противоположенными сѣченїями верьхняго и нижняго конуса находится.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XVII.

§. 70. *Линѣи* изъ кривыхъ *непремѣняемыя* (immutabiles), или *постоянныя* (constantes) суть тѣ, которыя въ тойже кривой

линѣѣ всегда имѣютъ одинакую величину. Такїя суть Параметръ трехъ коническихъ линѣй, и поперечникъ Эллипсиса и Гиперболы; *перемѣняемыя* жъ (mutabiles), или *непостоянныя* (inconstantes) суть тѣ, которыя въ той же кривой линѣѣ то прибавляются, то убавляются, какъ на пр. Абсциссы и Ординаты.

ПОЛОЖЕНIЕ.

§. 71. Линѣи постоянныя въ экващїяхъ первыми алфавита литерами *a*, *b*, *c*; непостоянныя жъ послѣдними *x*, *y*, *z* означаются.

ПРИМѢЧАНIЕ.

§. 72. Кромѣ коническихъ линѣй, и другїя кривыя линѣи происходятъ отъ непрерывнаго движенїя нѣкоторой точки, разсматриванїе которыхъ есть также не безполезно. Такїя суть во первыхъ Циклоида, Конхоида, Квадратриксъ и Улиткoвая линѣя; чего ради и описанїе оныхъ не безприлично будетъ здѣсь сообщить.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XVIII.

§. 73. *Циклоида* (Cyclois), или *Трохоида* (Trochois) есть кривая линѣя ABC, которая, во время обращенїя круга производителя APHN на прямой линѣѣ BC, описывается движенїемъ точки окружности круга A, которая съ начала движенїя на крайнюю прямой линѣи точку B, а конецъ обращенїя круга, на другую крайнюю точку C опирается. Ф. 10.

ПРИБАВЛЕНIЕ 1.

§. 74. И такъ чрезъ такое обращенїе вся окружность круга перемѣняется въ прямую линѣю BC, и бываетъ равна тойже окружности, и полкруга APH = BH.

ПРИБАВЛЕНIЕ 2.

§. 75. Также BF = четверти круга MF, и MD = четверти круга AP = FH = MP, понеже ME = PG. И потому прямыя линѣи отъ дуги циклоиды BMA къ окружности APH проведенныя, и съ основанiемъ BH параллельныя, равняются круга производителя дугѣ AP.

ПРИМѢЧАНIЕ.

§. 76. О Циклоидѣ есть особливой тракт. Io. Валлиз. Онъ же обьявляетъ, что давно уже, прежде Галилея, имѣлъ понятiе о такой линѣѣ нѣкто Бовиллъ, по свидѣтельству его матем. сочин. около 1510 год. издан. и Николай Кузанъ Кардиналъ, какъ то изъ рукописной его книги въ 1451. год. писанной явствуетъ. См притомъ Transact. philos. Angl. 1697. год. и 1 Ловѳорп. сокращен. Т. II. Т. I. стран. 116. Объ инструментѣ, которымъ можно начертить Циклоиду, обьявляетъ Доппельмаiеръ въ дополнен. матем. Фабрик. Бiоновой Ч. II. стран. 1.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XIX.

§. 77. *Конхоида* (Conchois) Никомедомъ изобрѣтенная происходитъ изъ того, ежели по прямой управляющей линѣѣ DE другая прямая линѣя AC, около полюса, или точки C, подвигается такимъ образомъ, что движимой линѣи части FD и GE, на управляющей линѣѣ сказывающiяся, будутъ всегда равны между собою. Фиг. 11.

ПРИБАВЛЕНIЕ.

§. 78. Чѣмъ косѣе движимая линѣя AC имѣетъ свое положенiе къ управляющей линѣѣ, тѣмъ болѣе части GE или FE къ сей наклоняются; однакожъ не могутъ упасть на прямую линѣю DE, но поверхъ ея всегда должны оказываться. Чего ради Конхоида, хотя мало по малу ближе и подходитъ къ управляющей линѣѣ, такъ что наконецъ разстоянiе обѣихъ линѣй зделается меньше всякой означаемой линѣи, ни подъ какимъ видомъ не можетъ соединиться съ оною, и потому называется ἀσύμπτωτος. См. Перраултъ въ

примѣч.

примѣч. къ Витрув. кн. III. гл. 2. и притомъ Давилер. Архитектор. курс. стран. 114.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XX.

§. 79. Ежели полупоперечникъ AB чрезъ четверть круга BND, и бокъ квадрата BC чрезъ высоту AB, оба равномѣрнымъ движеніемъ внизъ опускаются, такъ что, когда полупоперечникъ перебѣгаетъ нѣсколькую часть четверти круга, въ тоже время и бокъ квадрата перейдетъ подобную часть высоты AB, то кривая линѣя BOE перерѣзами полупоперечника и помянутаго бока означенная, τετραγωνίζουσα, или *Квадратриксъ* (quadratrix) называется. Изобрѣтеніе такой линѣи приписывается Диностратy и Никомеду. Ф. 12.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 80. И такъ служитъ здѣсь такая пропорція:

$$BD : ND = AB : MA = RO$$

См. Клав. Коммент. къ Эвклид. кн. VI. стран. 648. и слѣд.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXI.

§. 81. Положимъ, что въ какомъ нибудь кругѣ полупоперечникъ AB будетъ движимой, и равномѣрно движимая жъ нѣкоторая точка, и естьли полупоперечникъ, въ центрѣ C утвержденной, на окружности круга, а точка на полупоперечникѣ будутъ двигаться такимъ образомъ, что какую часть окружности перебѣжитъ полупоперечникъ, такую жъ на ономъ перейдетъ и движимая точка, то линѣя, отъ движенія точки произшедшая, *Улиткова*я (Spiralis), или *Геликсъ Архимедова* (Helix Archimedis) называется. Ф. 13.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 82. И такъ Улиткової линѣи полупоперечники С 1 С 2 и проч. къ полупоперечнику СА имѣютъ такое содержанїе, какое дуги окружности АВ, АВС и проч. чрезъ которыя полупоперечникъ круга между тѣмъ прошелъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXII.

§. 83. *Натура кривой* (natura curuae) линѣи называется такое ея жъ свойство, которое происходитъ изъ такого сравненїя постоянныхъ и непостоянныхъ линѣй, внутрь и внѣ кривой линѣи, извѣстнымъ образомъ проведенныхъ, которое содержится въ Алгебраической экваціи.

ЗАДАЧА XXX.

§. 84. *Найти свойство Круга.*

РѢШЕНІЕ.

Сравни даннаго круга поперечникъ АВ съ своими Абсциссами АР, РВ и Семїординатою РМ. Назови $AB = a$, $AP = x$,
Ф. 14.
$PB = a - x$, $PM = y$. Понеже извѣстно изъ Геометрїи (§. 120.), что перпендикулярная линѣя, въ полукружїи на поперечникѣ возставленная РМ, есть средняя пропорцїональная линѣя между отрѣзками поперечника, то происходитъ изъ того слѣдующая пропорцїя:

$$AP : PM = PM : PB$$

$$x \; y = y : a - x$$

которая дѣлаетъ такую эквацїю

$$yy = ax - xx$$

чего ради, когда объявленная пропорцїя есть собственная кругу, справедливо оная употребляется для означенїя свойства круга.

ПРИМѢ-

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 85. Свойство коническихъ сѣченій находится двоякимъ образомъ: или сѣченіе въ конусѣ почитается уже за здѣланное, чтобъ чрезъ сравненіе боковъ онаго, поперечника и Параметра съ Абсциссами и Ординатами, могла произведена быть такая экваціа, которая содержитъ въ себѣ свойство сѣченія; или кривая линѣя описывается на плоскости, продолживъ извѣстнымъ образомъ двѣ прямыя линѣи, взаимно себя пересѣкающія. Первой способъ показываетъ Стурмій въ изъяснен. матем. кн. II раздѣл. II. стран. 253. и слѣд. Другой способъ выхваляетъ Мархіо Госпиталій въ соч. своемъ Аналитическомъ, выше упомянутомъ кн. I. и оной по справедливости первому предпочитается для своей ясности. См. Рейно кн. VIII. стран. 545.

ЗАДАЧА XXXI.

§. 86. *Найти свойство Параболы.*

РѢШЕНІЕ.

1. Проведи неопредѣленную линѣю AX, и къ ней подъ прямымъ угломъ приложи прямую линѣю AL извѣстной долины, Ф. 15. то есть, которая означаетъ Параметръ Параболы. Пусть будутъ двѣ линѣйки RH и AK, и первая изъ оныхъ, наблюдая параллельное положеніе къ оси, двигается на прямой линѣѣ AL, а другая, будучи утверждена въ верьху A, отъ линѣи AL внизъ опускается такимъ образомъ, что прямой линѣи къ оси параллельной разстояніе RH отъ оси AR будетъ равно перпендикулу NL, опущенному изъ крайней точки прямой линѣи AL на линѣйку AK, внизъ протянутую.

2. Означь прямыя линѣи, которыя должно сравнивать между собою. То есть Параметръ AL = p, Абсцисса AP = x, Семїордината PM = y, LN = m.

3. Понеже явствуетъ изъ фигуры, что прямоугольные треугольники ARM, ALN, APM имѣютъ равные углы, и подобны между собою, то выводится изъ того такая пропорцїя:

$$AL : LN = PM : AP$$

$$p : m = y : x$$

Но какъ AR = PM = LN, то вмѣсто m взявъ y, будетъ

$$p : y = y : x$$

$$yy = px$$

Такая эквацїя показываетъ свойство Параболы. То есть, *въ Параболѣ квадратъ Семїординаты yy равняется прямоугольнику, произшедшему изъ Абсциссы на Параметръ* px.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 87. Слѣдовательно Семїордината есть средняя пропорцїональная линѣя между Параметромъ и Абсциссою, а Абсцисса есть третья пропорцїональная линѣя къ Параметру и Семїординатѣ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

Ф. 16. §. 88. Абсциссы содержатся между собою такъ, какъ квадраты Ординатъ. То есть, когда AP = x, PM = y, AP = u, pm = z, то происходятъ такїя эквацїи:

$$pu = zz \text{ и } px = yy$$

Но когда pu и px содержатся между собою такъ, какъ u и x (§. 119. Ариѳм.), то происходитъ изъ того такая пропорцїя:

$$pu : px = zz : yy$$

$$u : x = zz : yy \text{ (§. 120. Ариѳм.)}.$$

ЗАДАЧА XXXII.

§. 89. *Начертить Параболу.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

1. На прямой линѣѣ LP возьми AL за Параметръ Параболы, которую должно начертить. Ф. 17.

2. Потомъ возставь неопредѣленную перпендикулярную линѣю Am, и взявъ на линѣѣ LP нѣсколько центровъ, опиши полукружія LMP и проч. будутъ AP, Ap и проч. Абсциссы, a AM, A m и проч. Семіординаты Параболы.

3. И такъ на ось ея AP перенеси прежде найденныя Абсциссы, и къ онымъ подъ прямымъ угломъ приложи Ординаты, и изъ верьху A чрезъ крайнія точки Ординатъ проведи Параболу.

Другіе способы изъясняетъ Шоттенъ упражнен. матем. кн. IV. *или* См. гл. XIII. de organica sectionum conicarum in plano descriptione.

ЗАДАЧА XXXIII.

§. 90. *Найти разстояніе фокуса* F *отъ верьху Параболы.*

РѢШЕНІЕ.

Когда F есть фокусъ, то Ордината MN равна Параметру AL (§. 67.). И такъ MF $= \frac{1}{2} p$, и въ такомъ случаѣ для Параболы будетъ такая эквація: Ф. 18.

$\frac{1}{4} pp = px$

$\frac{1}{4} p = x$ (§ 120. Ариѳм.).

или четвертая часть Параметра $=$ AF, то есть искомому разстоянію фокуса отъ верьху.

ЗАДАЧА XXXIV.

§. 91. *Найти свойство Эллипсиса.*

РѢШЕНІЕ.

Ф. 19. 1. Возьми Aa за поперечникъ Эллипсиса, а AL за Параметръ.

2. Прикрѣпи къ крайнимъ поперечника точкамъ линѣйки AK и aO, движимыя около точекъ A и a, и естьли соединенїе, или сѣченїе линѣекъ въ точкѣ M здѣлается такимъ образомъ, что будетъ $AO = LN$, или разстоянїе линѣйки aO отъ самаго верьху будетъ равно перпендикулу, которой изъ крайней точки Параметра опущенъ на верьхнюю линѣйку AK, то точка M будетъ въ Эллипсисѣ.

3. Пусть будетъ $AL = p$, $Aa = a$, $AP = x$, $aP = a - x$, $PM = y$, $LN = m$. Понеже $\triangle ALN \backsim \triangle APM$, то служитъ такая пропорцїя:

$$AL : LN = PM : AP$$
$$p : m = y : x$$
$$px = my$$
$$\frac{px}{y} = m$$

и понеже $\triangle AaO \backsim \triangle PaM$, то будетъ

$$Aa : AO = aP : PM$$
$$a : m = a - x : y$$
$$ay : = ma - mx$$
$$\frac{ay}{a-x} = m = \frac{px}{y}$$

приведи дроби $\frac{ay}{a-x} = \frac{px}{y}$ къ одному знаменателю, и оной знаменатель уничтожь, такимъ образомъ произойдетъ

$$ayy = apx - pxx$$
$$yy = px - \frac{pxx}{a}$$

То

То есть, *въ Эллипсисѣ квадратъ Семіординаты равняется прямоугольнику, произшедшему изъ Параметра на Абсциссу, вычетши изъ того другой прямоугольникъ, которой происходитъ изъ Абсциссы на четвертую пропорціональную линѣю къ поперечнику, Параметру и Абсциссѣ.*

$$a : p = x : \frac{px}{a}$$

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 92. Первую экваціію перемѣнивъ въ такую пропорцію

$$y^2 : ax - xx = p : a,$$

квадратъ Семіординаты къ прямоугольнику, произшедшему изъ отрѣзковъ, будетъ имѣть такое содержаніе, какое имѣетъ Параметръ къ поперечнику.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 93. Когда $x = AC = \frac{1}{2}a$, то произойдетъ изъ того такая пропорція: Ф.20.

$$yy : \tfrac{1}{4}aa = p : a$$

помощію которой находится величина соединенной оси. Понеже изъ предъидущей пропорціи составляется такая экваціія:

$$ayy = \tfrac{1}{4}aap$$
$$yy = \tfrac{1}{4}ap$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ap}$$
$$2y = \sqrt{ap}$$

И такъ половина соединенной оси будетъ BC, то есть половинная часть средней пропорціональной линѣи между Параметромъ и поперечникомъ; или цѣлой соединенной поперечникъ BD есть средняя пропорціональная линѣя между Параметромъ и поперечникомъ. И понеже $ayy = ap$, то служитъ такая пропорція:

$$a : 2y = 2y : p$$

то есть Параметръ p будетъ третья пропорціональная линѣя къ поперечнику и къ соединенному съ онымъ же поперечнику $2y$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 94. Изъ чего также познается содержаніе квадратовъ Семіординатъ. Положимъ $Ap = u$, $pm = z$, то произойдетъ для Эллипсиса экваціія: Ф.18.

$$azz = apu - puu$$

$$zz = pu - \frac{puu}{a}$$

$$\text{и } yy = px - \frac{pxx}{a}$$

Слѣдовательно, какое содержанїе имѣютъ $zz:yy$, такое жъ будутъ имѣть и равныя количества $pu - \frac{puu}{a}$: $px - \frac{pxx}{a}$. По чему справедлива слѣдующая пропорцїя:

$$zz:yy = pu - \frac{puu}{a} : px - \frac{pxx}{a}$$

И понеже умноженїе на одно тоже число не перемѣняетъ содержанїя, на пр.

$$zz:yy = apu - p.\ u : apx - pxx$$

и опять чрезъ дѣленїе на одно тоже число p не перемѣняется содержанїе; того ради будетъ

$$zz:yy = au - uu : ax - xx$$

то есть, квадраты Семїординатъ имѣютъ такое содержанїе, какое прямоугольники, произшедшїе изъ отрѣзковъ поперечника AP, Pa : Ap. pa.

ЗАДАЧА XXXV.

§. 95. *Начертить Эллипсисъ.*

РѢШЕНІЕ.

1. Понеже

$$yy = \frac{apx - pxx}{a}$$

то будетъ $y = \sqrt{\frac{(apx - pxx)}{a}}$

для составленїя такого количества посылай:

$$a:p = x:\frac{px}{a}$$

потомъ между $\frac{px}{a}$ и $a - x$ найди среднюю пропорцїональную линѣю, или Семїординату, соотвѣтствующую принятой Абсциссѣ.

2.

2. А чтобъ найти больше семїординатъ, то къ поперечнику Aa приложи подъ прямымъ угломъ параметръ AL, и проведи гипотенузу La, также въ треугольникѣ AaL проведи нѣсколько перпендикулярныхъ линѣй PK и pr, которыя будутъ четвертыя пропорцїональныя линѣи къ Aa, AL и aP, или ap; или вмѣсто x принявъ aP и ap, будетъ $\frac{px}{a}$. Потомъ между сими четвертыми пропорцїональными линѣями и между $a-x$, или AP, Ap найди среднїя пропорцїональныя линѣи, и онѣ покажутъ Семїординаты, которыя должно наложить на Абсциссы, и чрезъ крайнїя ихъ точки провести Эллипсисъ. Больше рѣшенїй объявляетъ Шоотенъ кн. 100. гл. 3. Ф. 21.

ЗАДАЧА XXXVI.

§. 96. *Найти разстоянїе фокуса отъ верьху Эллипсиса.*

РѢШЕНIЕ.

Когда MN Параметръ а F фокусъ Эллипсиса, то будетъ такая эквацїя: Ф. 20.

$$\tfrac{1}{4}pp = px - \frac{pxx}{a} \quad (\S.\ 67.)$$

$$\tfrac{1}{4}app = apx - pxx$$

$$\tfrac{1}{4}ap = ax - xx$$

И понеже извѣстно, что AF гораздо меньше, нежели AC, то должно обратить эквацїю такимъ образомъ, чтобъ было $xx - ax$, то есть

$$xx - ax = -\tfrac{1}{4}ap$$

дополнивъ неполную квадратическую эква-цію (§. 43.), будетъ

$$\frac{1}{4}aa - ax + xx = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap$$

$$\frac{1}{2}a - x = V(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap)$$

приложивъ x, и вычетши радиксъ, будетъ

$$\frac{1}{2}a - V(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap) = x = AF.$$

То есть, здѣлай радиксъ, сыскавъ среднюю пропорціональную линѣю между $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$ и $\frac{1}{2}a$, которая будетъ F C, и оную вычетши изъ половины оси A C, останется A F разстояніе фокуса отъ искомаго верьху.

ЗАДАЧА XXXVII.

§. 97. *Найти величину линѣй* B F *и* Bf, Ф. 20. *которыя изъ двухъ фокусовъ Эллипсиса проводятся къ крайнимъ точкамъ соединеннаго поперечника* B D.

РѢШЕНІЕ.

Выше сказано, что F C и $fc = V\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap$ (§. 96.), и нашли уже, что половинной меньшой поперечникъ B C $= \frac{1}{2}Vap$ (§. 93.); слѣдовательно по Пиѳаг. Теор. (§. 193. Геом.) будетъ

$$\square FC + \square BC = \square BF$$

$$\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}ap = \square BF$$

$$\text{или } \frac{1}{4}aa = \square BF$$

$$\frac{1}{2}a = BF$$

и понеже BF = Bf, то видно, что линѣи изъ фокусовъ къ крайней точкѣ меньшей оси Эллипсиса проведенныя, обѣ вмѣстѣ, равняются большой оси.

Тоже можно доказать и о другихъ всякихъ линѣяхъ, которыя изъ двухъ фокусовъ проводятся къ точкамъ окружности Эллипсиса.

ПРИБА.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 98. Удобнѣйшїй способъ для черченїя Эллипсиса происходитъ изъ слѣдующаго: то есть, чрезъ воткнутые на доскѣ гвоздья, опредѣляется разстоянїе фокусовъ, и около оныхъ гвоздей обводится нитка произвольной длины, имѣющая концы связанные, и потомъ вложеннымъ чемъ нибудь остроконечнымъ описывается Эллипсисъ.

ЗАДАЧА XXXVIII.

§. 99. *Найти свойство Гиперболы.*

РѢШЕНІЕ.

Взявъ поперечной дїаметръ Aa, къ краямъ онаго приложи двѣ подвижныя линѣйки, и наблюдая тѣже правила, какїя въ разсужденїи происхожденїя Эллипсиса упомянуты были (§. 91.), подвигай оныя такимъ образомъ, чтобъ, принявъ AL за Параметръ, было $AK = LN$. Что здѣлавъ, для $\triangle ALN \backsim \triangle APM$, произойдетъ такая пропорцїя: ф. 22.

$$AL : LN = PM : AP$$
$$p : m = y : x$$
$$px = my$$
$$\frac{px}{y} = m$$

и по причинѣ $\triangle AaK \backsim \triangle aPM$

$$Aa : AK = aP : PM$$
$$a : m = a + x : y$$
$$ay = ma + mx$$
$$\frac{ay}{a+x} = m = \frac{px}{y}$$

здѣлавъ приведенїе дробей, будетъ

$$ayy = apx + pxx$$
$$yy = px + \frac{pxx}{a}$$

ВЪ Гиперболѣ квадратЪ Семїординаты yy рапняется такому прямоугольнику, которой происходитЪ изЪ Абциссы на ПараметрЪ px, и когда кЪ нему будетЪ приложенЪ другой прямоугольникЪ, произшедшей изЪ Абсциссы на четвертую пропорцїональную линѣю кЪ поперечнику, Параметру и Абсциссѣ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 100. Почему эквацїя Гиперболы отЪ эквацїи Эллипсиса разнствуетЪ только знáкомЪ, то есть вЪ Эллипсисѣ должно вычесть прямоугольникЪ $\frac{pxx}{a}$ изЪ px, а вЪ гиперболѣ должно приложить тотЪже прямоугольникЪ кЪ px.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 101. ИзЪ чего также явствуетЪ содержанїе и основанїеименЪ Параболы Παραβολῆς, Эллипсиса ἐλλείψεως, и Гиперболы ὑπερβολῆς. Парабола есть линѣя равенства, когда $px = yy$, ЭллипсисЪ линѣя недостатка, понеже $px - \frac{pxx}{a} = yy$, а Гипербола линѣя излишества, потому что $px + \frac{pxx}{a} = yy$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 102. ВЪ Гиперболѣ служитЪ и такая пропорцїя:

$$y^2 : ax + xx = p : a$$

ПРИБАВЛЕНІЕ 4.

§. 103. Для сысканїя СемїординатЪ, понеже $y = \sqrt{\frac{apx + pxx}{a}}$, сперьва находятся четвертыя пропорцїональныя линѣи $\frac{px}{a}$ чрезЪ такую пропорцїю: $a : p = x : \frac{px}{a}$, потóмЪ сыскиваются среднїя пропорцїональныя линѣи между $\frac{px}{a}$ и $a + x$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 5.

§. 104. Также квадраты СемїординатЪ содержатся между собою, какЪ $aa + uu : ax + xx$, или какЪ прямоугольники aP. AP и ap. Ap.

ПРИБА-

ПРИБАВЛЕНІЕ 6.

§. 105. Разстояніе фокуса отъ верьху есть $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ap)} - \frac{1}{2}a$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 7.

§. 106. Какъ въ Эллипсисѣ сумма линѣй изъ двухъ фокусовъ, ко всякимъ точкамъ окружности проведенныхъ, равняется большей оси (§. 97.), такъ напротивъ того въ Гиперболѣ разность линѣй изъ фокусовъ, ко всякой Ф. 23. точкѣ Гиперболы проведенныхъ, равняется поперечнику Aa.

ЗАДАЧА XXXIX.

§. 107. *Начертить гиперболу.*

РѢШЕНІЕ.

1. На прямой неопредѣленной линѣѣ f P Ф. 23. возьми поперечной бокъ, или поперечной діаметръ a A, и съ онымъ соедини равныя фокуса разстоянія отъ верьху af и A F.
2. Потомъ изъ нижняго фокуса F, по изволенію взятымъ разстворeніемъ циркула, отъ обѣихъ частей оси начерти дуги, по изволенію жъ взятое растворeніе, такъ какъ Абсциссу, тотчасъ изъ верьху A внизъ перенеси на ось.
3. На конецъ возьми циркулемъ сумму поперечнаго діаметра a A и Абсциссы A P, или линѣю a P, и одну ножку циркуля поставивъ въ верьхнемъ фокусѣ f, нижнія дуги съ обѣихъ сторонъ пересѣки другими; и естьли больше такихъ дугъ, взаимно себя пересѣкающихъ, изъ нижняго и верьхняго фокуса проведено будетъ, то изъ верьху A чрезъ точки перерѣзовъ M можетъ описана быть Гипербола. Основаніе такой практики должно выводить изъ предъидущаго прибавленія (§. 106.). См. притомъ Шоотен. кн. 100. гл. 9.

ТЕОРЕМА II.

§. 108. *Когда сѣченїе Гилерболы DEF параллельно съ плоскостью оси конуса, то бока конуса AB и AC будутъ Асимптоты Гилерболы, которыя хотя и приближаются всегда къ продолженной гилерболѣ, но не соединяются съ нею.*

Ф. 23.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Во первыхъ должно доказать, что бока конуса, естьли продолжатся вмѣстѣ съ Гиперболою, отъ часу ближе всегда приближаются къ оной. Что, хотя изъ примѣра вещественнаго конуса нѣсколько уже и понять можно, однако по Геометрически доказывается такимъ образомъ: когда увеличивается конусъ, то увеличивается и его полупоперечникъ BL или LG, а линѣи перпендикулярныя EG и FK, или прямые синусы опущенные на полупоперечники BL и LC, понеже измѣряютъ разстоянїе сѣченїя отъ плоскости оси, не перемѣняются, потому что сѣченїе параллельно съ плоскостью оси конуса. Но, когда увеличивавается полупоперечникъ, или синусъ цѣлой BL, а синусъ прямой EG не перемѣняется, пропорцїя синуса прямаго къ цѣлому непрерывно умаляется, или меньшой синусъ EG болѣе содержится въ большомъ полупоперечникѣ BL, нежели въ меньшомъ; въ прямоугольномъ же треугольникѣ синусы имѣютъ прямое содержанїе къ противоположеннымъ угламъ (§ 39. Триг.

Триг. плоск.); чего ради, когда увеличивается полупоперечникъ BL, и не перемѣняется прямой синусъ EG, уголъ ELG умаляется, и понеже прямой уголъ при E не перемѣняется, что помаленьку убываетъ у величины угла ELG, то самое прибавляется къ другому наклоненному углу EGL, которой увеличивъ, увеличивается также и противоположенной ему синусъ EL, а синусъ обращенной BE умаляется; изъ чего явствуетъ, что разстоянїе BE, между бокомъ конуса и Гиперболою находящееся, всегда умаляется, и Гипербола къ боку конуса помаленьку подходитъ ближе. А что не можетъ она соединиться съ боками онаго, сїе ясно разумѣть можно изъ слѣдующаго, понеже сѣченїе Гиперболы принимается за учиненное внѣ средней плоскости оси, гдѣ поперечникъ всегда бываетъ больше всякой хорды GK, проведенной внѣ круга (§. 128. Геом.); слѣдовательно сѣченїе Гиперболы и проч. Ч. н. д.

ПРИМѢЧАНIE.

§. 109. Для лучшаго изъясненїя и облегченїя сего доказательства, полезно имѣть деревянной конусъ, въ которомъ сѣченїе Гиперболы правильнымъ образомъ учинено. Впрочемъ само чрезъ себя явствуетъ то, что такое приближенїе безъ соединенїя въ Гиперболѣ, чемъ нибудь остроконечнымъ начерченной, самымъ дѣломъ не можетъ изобр жено быть. Между тѣмъ довольно и того, что мы своими мыслями до того не простираемся, чтобъ разумѣть, гдѣ и когда разстоянїе, между прямою и кривою линѣею находящееся, перестаетъ быть раздѣлимое; хотя никто не сомнѣвается о томъ, что Гипербола къ своей Асимптотѣ

на конецЪ такЪ близко наклоняется, что разстоянїе обѢихЪ дѢлается меньше всякой означаемой линѢи. См. Франц. Бароц. кн. о удивительной Геометрической задачѢ, 13 способами доказанной, которая учитЪ означать линѢи Асимптотъ, издан. вЪ Венецїи 1586 год. 4. Берн. Лам. вЪ предувѢд. Матем. Элем. кЪ концу, о раздѢленїи величины вЪ безконечность, важно говоритъ такимЪ образомЪ: mais si ce traité fait voir l'entenduë de l'esprit, il fait aussi connoitre ses bornes, car il' y a des demonstrations claires & convaincantes, qu une grandeur finie est diuisible jusqu' à l'infini. Cette infinité est incomprehensible: cependant on en fait connoitre les proprietés, les rapports: ce qu'il demontre, qu'il y à des verités qui sont egalement certaines & incomprehensibles; & que par consequent les verités que la religion nous enseigne ne doivent pas être suspectes, parce qu'elles sont incomprehensibles. См. при томЪ стран. 298. и выше § 196. Геом ЦѢлое Ламїаново предувѢдомленїе, теперь обЪявленное, разными полезными наставленїями преисполненное, достойно того, чтобЪ всякЪ обучающїйся свободнымЪ наукамЪ, не одинажды но всегда прочитывалЪ оное.

ЗАДАЧА XL.

§ 110. *Изобразить Экващїею свойство Циклоиды.*

РѢШЕНІЕ.

Ф. 10. Возьми полкруга APH вмѢсто линѢи АбсциссЪ, и назови $AP = x$, $PM = y$, $APH = c$, $BH = d$. Описанїе Циклоиды (§. 75.) показываетЪ слѢдующую пропорцїю:

$$APH : BH = AP : PM$$
$$c : d = x : y$$
$$dx = cy$$

но понеже $c = d$ (§. 74.), то будетЪ

$$x = y$$

То есть, *тЪ ЦиклоидѢ отрѢзанная частица отЪ производителя полкруга, рав-*

равняется Семиординатѣ, находящейся между Циклоидою и Абциссою. См Рейно стран. 595.

ЗАДАЧА XLI.

§. 111. *Найти свойство Квадратриксы.* Ф. 12.

РѢШЕНІЕ.

Назови четверть круга BND $= a$, ND $= x$, AB $= r$, MA $=$ OR $= y$ Происхожденіе Квадратриксы (§. 80.) требуетъ такой пропорціи:

$$BD : ND = AB : OR$$
$$a : x = r : y$$
$$ay = xr.$$

То есть, *въ Квадратриксѣ произведеніе изъ четверти круга на синусъ Квадратриксы равняется такому прямоугольнику, которой происходитъ изъ умноженія полупоперечника на частицу четверти круга* ND, *противоположенную синусу Квадратриксы.*

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 112. И потому $\frac{ay}{r} =$, x всякая частица четверти круга ND есть четвертая пропорціональная линѣя къ полупоперечнику, къ четверти круга и синусу Квадратриксы.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 113. Понеже какъ для Циклоиды, такъ и для Квадратриксы, чрезъ соединеніе только прямыхъ линѣй, не можетъ составлена быть эквація, но частицы кривой линѣи вмѣшиваются въ оную; того ради явствуетъ, что съ такою экваціею труднѣе поступать, и по той причинѣ такія кривыя линѣи имѣютъ отмѣнное свойство, нежели кругъ и коническія линѣи. И такъ Лейбниціи иныя кривыя линѣи геометрическими и алгебраическими, а

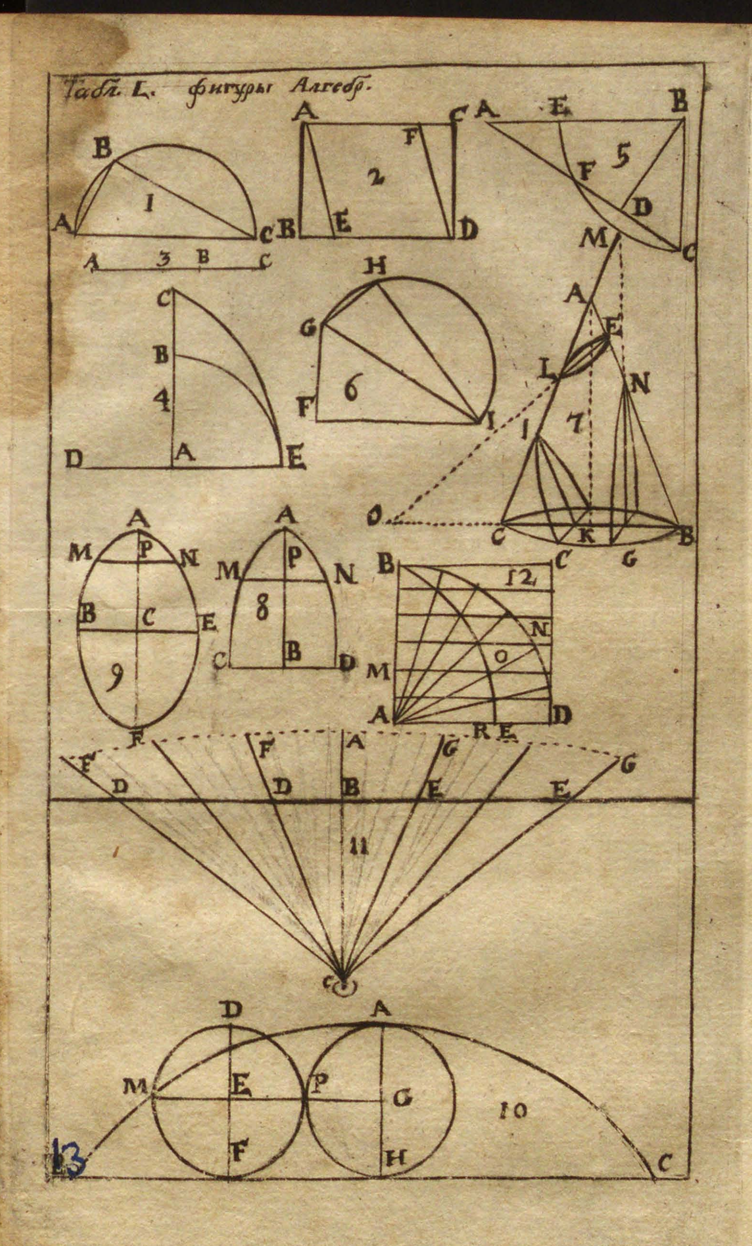
иныя переходящими называетъ. То есть, *кривыя линѣи геометрическія*, или *алгебраическія* суть тѣ, которыхъ свойство изъясняется такою эквацїею, которая не требуетъ никакой квадратуры кривой линѣи, какія суть кругъ и сѣченія конуса; *механическія* жъ (Mechanicae), или *переходящія* (transcendentes) называются такія кривыя линѣи, когда эквація, изображающая свойство кривой линѣи, требуетъ квадратуры кривой же линѣи, случившейся въ эквацїи. На пр. Циклоида, Квадратриксъ и проч. См Act. Erud. Lipſ. 1684. год. стран. 233. и Рейно стран. 593.

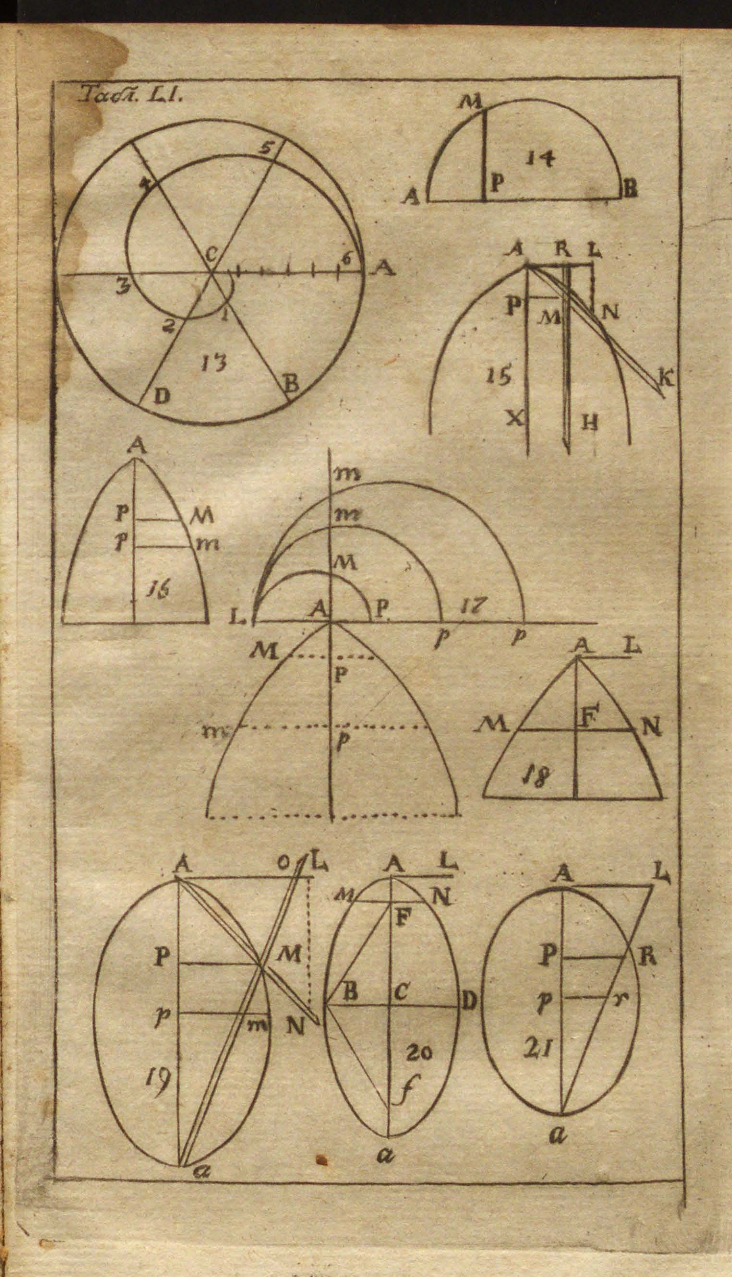
ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 114. Въ Элементахъ Алгебры далѣе не простираемся. Понеже все то, что ни слѣдуетъ, какъ на пр. о свойствѣ и перемѣненїяхъ эквацїй, о мѣстахъ Геометрическихъ, о составленїи кубическихъ и биквадратическихъ эквацїй, и объ Аналитикѣ неопредѣленныхъ, требуетъ должайшаго разсматриванія и упражненія, нежели какъ дозволяетъ настоящее намѣренїе; по чему справедливѣе все то или оставляется для особливыхъ лекцїй, или выводится изъ такихъ писателей, которые пространнѣе пишутъ объ Аналитикѣ.

КОНЕЦЪ.




Табл. I. фигуры Алгебр.


Tab. LI.
M
14
A
P
B
A R L
P
M
N
15
K
X
H
5
4
C
6
A
3
2
1
13
D
B
A
P
M
p
m
16
m
m
M
L
A
P
17
p
p
M
P
m
p
A L
M
F
N
18
A
o
L
P
M
p
m
N
19
a
A L
M
N
F
B
C
D
20
f
a
A
L
P
R
p
r
21
a

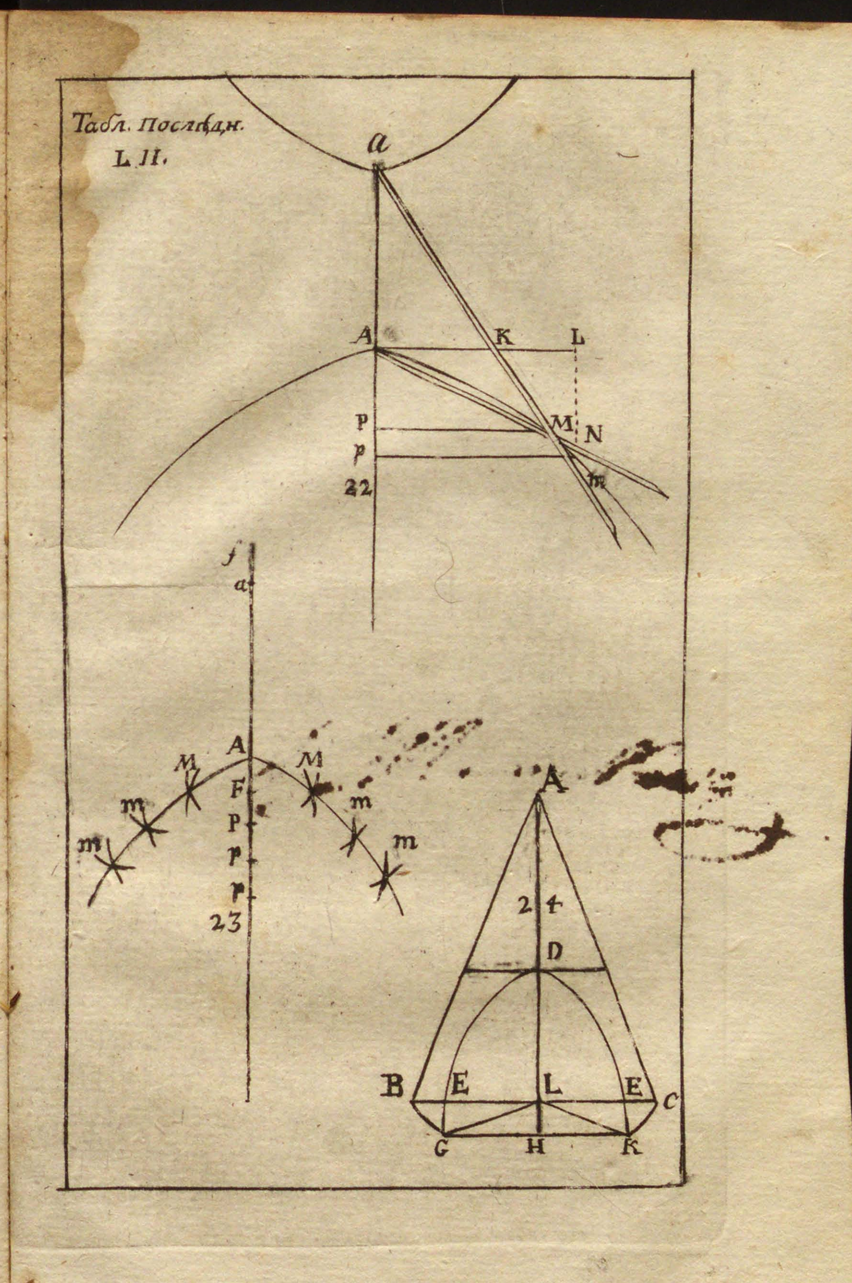


Табл. Последн.
L. II.
a
A
K
L
P
M
N
p
m
22
f
a
A
M
M
F
m
m
P
m
m
p
p
23
A
24
D
B
E
L
E
C
G
H
K